Exercice n°1.

Le plan est rapporté au repère $(O; I, J)$

1. Dans le repère donné en annexe, on donne la droite d d'équation $y = \frac{2}{3}x + 2$
   a. Préciser son coefficient directeur et donner un de ses vecteurs directeurs $\vec{u}$.

Le coefficient directeur de d est égal à $\frac{2}{3}$ et $\vec{u}\ \left(1\,;\frac{2}{3}\right)$ est un vecteur directeur de d.

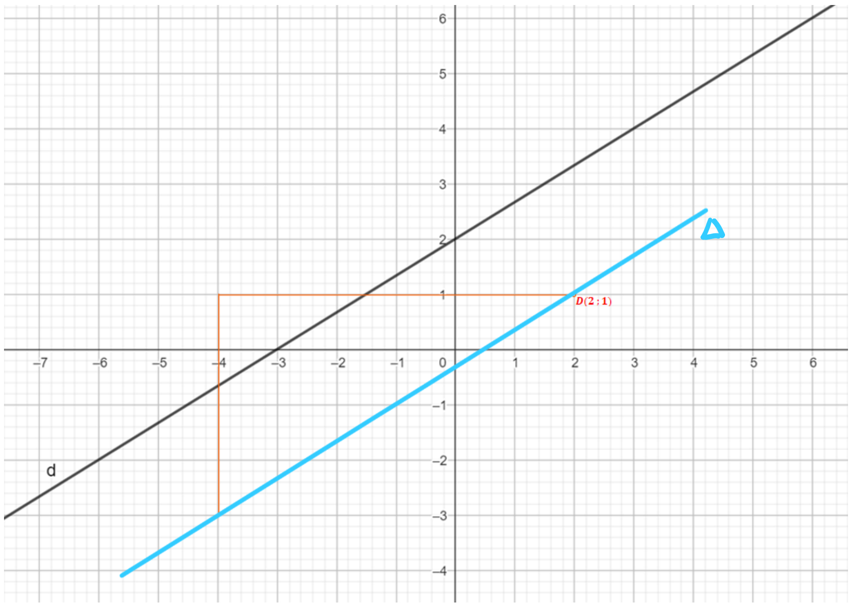
   b. Monter que le vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix}2022\\1348\end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de la droite d.

$1348 = 2022 \times \frac{2}{3}$ donc $\vec{w} = 2022\,\vec{u}$ ce qui prouve que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et, par conséquent, $\vec{w}$ est un autre vecteur directeur de la droite d.

2. Montrer, à l'aide d'un calcul, que les points $A(3; 4)$ et $B(-3; 0)$ sont des points de d.

$$\frac{2}{3} \times 3 + 2 = 4 \text{ soit } y_A = \frac{2}{3}x_A + 2 \text{ donc } A(3\,;4) \in d$$
$$\frac{2}{3} \times (-3) + 2 = 0 \text{ soit } y_B = \frac{2}{3}x_B + 2 \text{ donc } B(-3\,;0) \in d$$

3. *a*. Construire la droite Δ passant par le point $D(2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-6\\-4\end{pmatrix}$.



   b. Déterminer une équation cartésienne de Δ.

Une équation cartésienne de Δ est de la forme $ax + by + c = 0$ où $\vec{u}(-b\,; a)$ est un vecteur directeur : on peut donc choisir $b = 6$ et $a = -4$ à savoir, $d : -4x + 6y + c = 0$.

On sait de plus que $D(2\,;1) \in \Delta$ donc $-4 \times 2 + 6 \times 1 + c = 0$ soit $c = 2$.

Finalement une équation cartésienne de Δ est $-4x + 6y + 2 = 0$.

   c. Démontrer que les droites d et Δ sont parallèles.

$\vec{u}\ \left(1\,;\frac{2}{3}\right)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{v}(-6 : -4)$ est directeur de Δ.
Il est immédiat que $-6\vec{u} = \vec{v}$ donc les vecteurs sont colinéaires et les droites d et Δ sont donc parallèles.

4. On considère la droite d' d'équation cartésienne $ax - 2y + 3 = 0$, ou a est un réel.

a. Déterminer le réel a pour que d' passe par le point B.

$$B(-3;0) \in d' \iff ax_B - 2y_B + 3 = 0 \iff -3a + 3 = 0 \iff a = 1$$

b. Déterminer l'équation réduite de la droite Δ' passant par A et parallèle à d'.

Δ' et d' sont parallèles, elles admettent donc le même coefficient directeur.

$$x - 2y + 3 = 0 \iff 2y = x + 3 \iff y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

Le coefficient directeur de d' est donc égal à $\frac{1}{2}$.

L'équation réduite de Δ' est donc de la forme : $y = \frac{1}{2}x + p$.

$$A(3\,;4) \in \Delta' \iff 4 = \frac{1}{2} \times 3 + p \iff p = 4 - \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

L'équation réduite de Δ' est donc $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$

Exercice n°2.

Soit f la fonction définie sur $\boldsymbol{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et h un réel non nul. La courbe représentative de la fonction f notée C_f est donnée ci-contre.

1. Calculer $f(-2)$ et $f(-2+h)$

$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$

$f(-2+h) = (-2+h)^2 + 1 = 4 - 4h + h^2 + 1 = h^2 - 4h + 5$

2. Vérifier que le taux d'accroissement de f entre -2 et $-2+h$ est égal à $-4+h$.

$$\frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \frac{(h^2 - 4h + 5) - 5}{h} = \frac{h^2 - 4h}{h} = \frac{h(h-4)}{h} = h - 4$$

3. ***a.*** Montrer que f est dérivable en -2

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0}(-4+h) = -4$$

La limite du taux d'accroissement de f entre -2 et $-2+h$ existe et est fini donc f est dérivable en -2.

b. Déterminer le nombre dérivé de f en -2.

$$f'(-2) = -4$$

4. ***a.*** Déterminer l'équation de la tangente à C_f au point A d'abscisse -2

Par définition, cette tangente T_A admet $f'(-2) = -4$ comme coefficient directeur donc T_A admet une équation réduite de la forme $y = -4x + p$.

$$A\big(-2\,;f(-2)\big)\ soit\ A(-2\,;5) \in T_A \iff 5 = -4 \times (-2) + p \iff 5 - 8 = p \iff p = -3$$

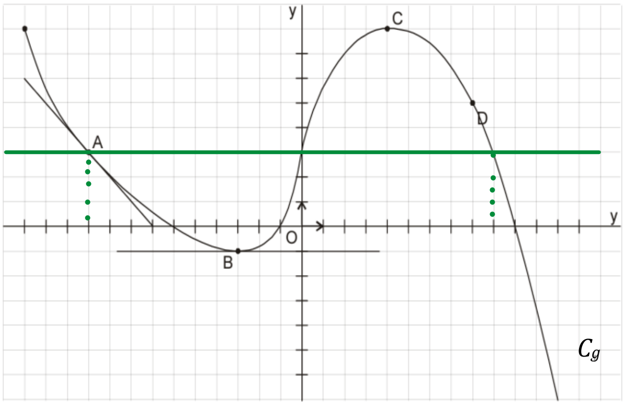
Donc $T_A : y = -4x - 3$

b. Tracer la tangente dans le repère.

Exercice n°3

On a tracé, ci-après, la courbe représentative d'une fonction g définie sur $[-13; 12]$.

Par lecture graphique et avec la précision qu'elle permet, répondre directement sur cette feuille :



1. L'image de 0 par g est 3

2. Sur $[-13; 12]$, l'inéquation $g(x) \geq 3$ a pour ensemble solution

$$[-13\,;-10] \cup [0\,;9]$$

3. $g'(-10) = -1$ et $g'(-3) = 0$

4. Le taux de variation entre 4 et 8 est :

$$\frac{f(8)-f(4)}{8-4} = \frac{5-8}{4} = -\frac{3}{4}$$

5. Construire ci-dessous, le tableau de variation de g, puis le tableau de signe de $g(x)$.

x	-13		-3		4		12
Var de g	8	↘	-1	↗	8	↘	-7

x	-13		-6		-1		10		12
Signe de $g(x)$		+	0	−	0	+	0	−	

6. Résoudre, à l'aide d'un tableau de signe, l'inéquation $\frac{g(x)}{x-10} \leq 0$

x	-13		-6		-1		10		12
Signe de $g(x)$		+	0	−	0	+	0	−	
Signe de $(x-10)$		−		−		−	0	+	
Signe de $\frac{g(x)}{x-10}$		−	0	+	0	−	‖	−	

L'ensemble des solutions de l'inéquation est : $[-13\,;-6] \cup [-1\,;10[\cup]10\,;\ 12[$

Exercice n°4

On considère le polynôme du second degré $f(x) = -2x^2 + 16x - 24$ avec $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que 2 est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

$$f(2) = -2 \times 2^2 + 16 \times 2 - 24 = -8 + 32 - 24 = 0$$

$f(2) = 0$ donc 2 est une solution de l'équation $f(x) = 0$.

2. Déterminer les coordonnées du sommet S de la parabole.

On sait que $S(\alpha\,;\beta)$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{16}{2(-2)} = 4$ et $\beta = f(\alpha) = f(4) = 8$ donc $S(4\,;8)$

3. Dresser le tableau de variation de f.

4. Déterminer la forme canonique de f.

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = -2(x-4)^2 + 8$$

5. Factoriser $(x-4)^2 - 2^2$.

$$(x-4)^2 - 2^2 = \big((x-4)+2\big)\big((x-4)-2\big) = (x-2)(x-6)$$

6. Ecrire $f(x)$ sous forme factorisée puis résoudre l'équation $f(x) = 0$.

$f(x) = -2(x-4)^2 + 8 = -2((x-4)^2 - 4) = -2((x-4)^2 - 2^2) = -2(x-2)(x-6)$

$f(x) = 0 \iff x-2=0 \ ou \ x-6=0 \iff x=2 \ ou \ x=6$

Donc $S = \{2\,;6\}$