Durée : 4 heures

SPÉCIALITÉ

Les calculatrices sont autorisées.

Le sujet est composé de quatre exercices indépendants. La qualité et la précision de la rédaction seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 (5 points) Am du Sud Nov 2019

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par:

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \\ u_0 & = & 5 \end{cases}$$

Partie A :

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
3. Démontrer que, pour tout entier nature n, $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. Justifier que la suite (u_n) converge.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n+2}$.

1. (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2v_n+1}{1-v_n}$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Partie C :

On considère l'algorithme ci-dessous.

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?
2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

$u \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
$Tant\ que\ u \geqslant 1{,}01$
  $n \leftarrow n + 1$
  $u \leftarrow 3 - \dfrac{10}{u+4}$
$Fin\ du\ Tant\ que$

Exercice 2 (3 ou 4 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : L'équation $z - i = i(z + 1)$ admet une solution réelle.

Affirmation 2 : L'équation $2z^2 - 3z + 5 = 0$ admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

Affirmation 3 : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.

Exercice 3 (6 ou 7 points)

Partie A – Conjectures

On donne en **annexe** la représentation graphique C_f de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^3+1}{4x^2-1}$

Quelles conjectures pouvez-vous faire concernant :

- L'ensemble de définition de f
- Les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
- Les variations de f.

On pourra résumer ces informations dans un tableau.

Partie B – Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

1. Étudier le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$ ainsi que les limites de g en $+$ et $-\infty$.
   En déduire le tableau de variation de g.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution que l'on note α.
   Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
3. Déterminer le signe de g sur $\mathbb{R}$.

Partie C – Étude des variations de *f*

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$$

1. Montrer que f est définie sur $D_f = \mathbb{R}/\left\{-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right\}$.
2. Après avoir étudier le signe de $4x^2 - 1$ sur D_f , déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ces résultats.
3. Justifier que f est continue et dérivable sur D_f et montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$.
4. Étudier le signe de f' et en déduire le sens variation de f sur D_f.
   Dresser le tableau complet des variations de f.

Partie D

1. Montrer que pour tout x de D_f, $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{x+4}{4(4x^2-1)}$.
2. Soit (D) la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x$.
   - ***a.*** Tracer la droite (D) ainsi que les asymptotes de C_f dans le repère donné en annexe.
   - ***b.*** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{4}x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{4}x\right)$.
     Quelle interprétation graphique peut-on faire de ces deux résultats.

Exercice 4 de spécialité (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.
Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x-ième jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.
2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Calculer $M \times A$.

   (b) Que représente la matrice M pour la matrice A ?

4. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2500 personnes.

   Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours ?

   Justifier la réponse.

Partie B

On considère la matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

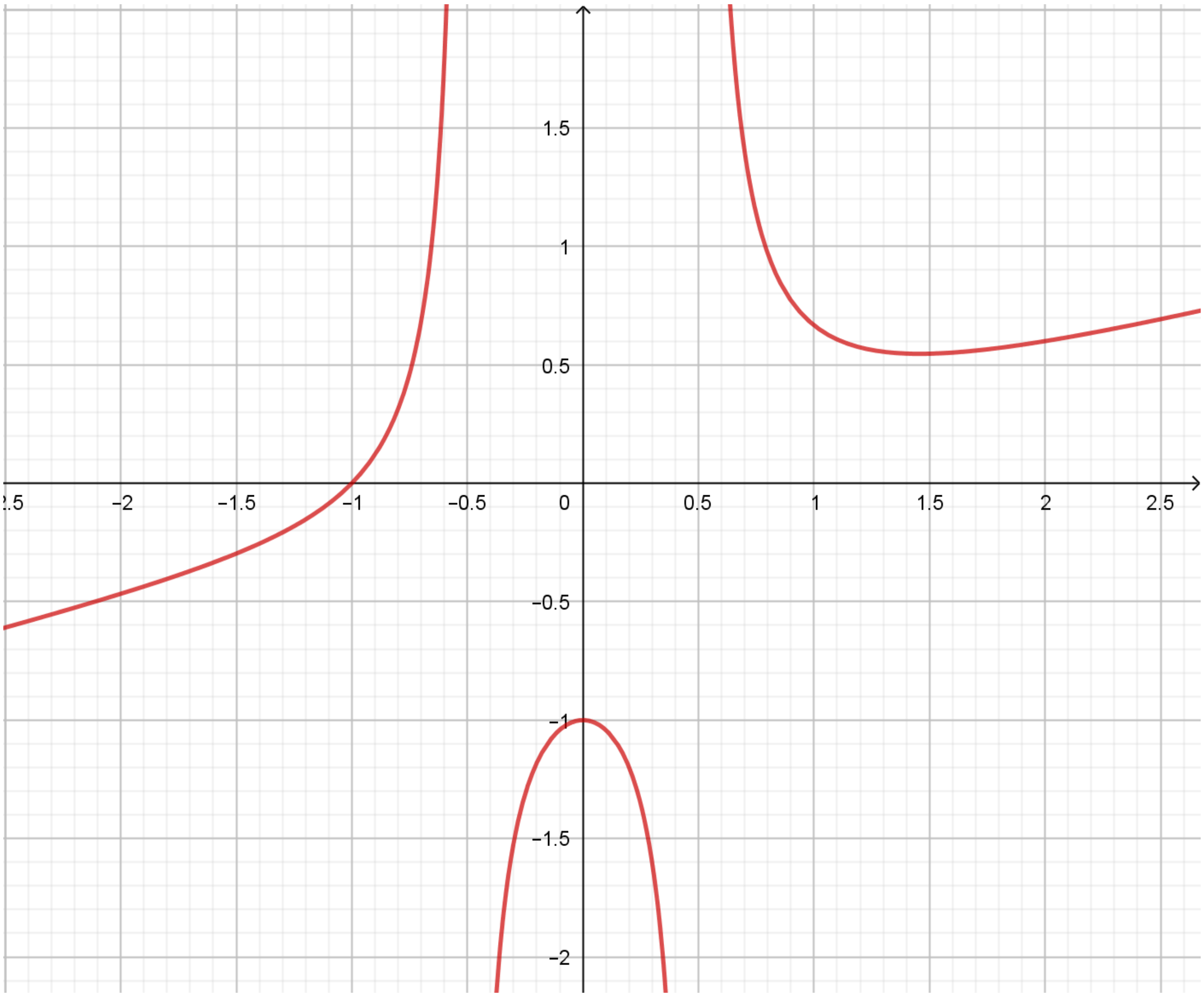
1. Après avoir justifié que la matrice P est inversible, calculer la matrice P^{-1} à l'aide de la calculatrice.
2. Montrer que $A = P \times D \times P^{-1}$.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.
4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

   Calculer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Annexe à compléter et à rendre avec la copie

NOM :	Prénom :

Exercice 3



Les mathématiques du chat !