Exercice 1 (5 points) Am du Sud Nov 2019

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geqslant 0$ par:

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & 3 - \dfrac{10}{u_n + 4} \\ u_0 & = & 5 \end{cases}$$

Partie A :

1. Déterminer la valeur exacte de u_1 et de u_2.

Avec $n = 0$, $u_1 = 3 - \frac{10}{5+4} = 3 - \frac{10}{9} = \frac{27-10}{9} = \frac{17}{9}$;
Avec $n = 1$, $u_2 = 3 - \frac{10}{\frac{17}{9}+4} = 3 - \frac{10}{\frac{53}{9}} = 3 - \frac{90}{53} = \frac{159-90}{53} = \frac{69}{53}$.

2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

Initialisation : $u_0 = 5 \geqslant 1$: la propriété est vraie au rang zéro ;

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$, tel que $u_n \geqslant 1$.

$$u_n \geqslant 1 \Leftrightarrow u_n + 4 \geqslant 5 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{u_n+4} \Leftrightarrow \frac{10}{5} \geqslant \frac{10}{u_n+4} \Leftrightarrow -\frac{10}{u_n+4} \leqslant -2 \Leftrightarrow 3 - \frac{10}{u_n+4} \geqslant 3 - 2,$$

soit finalement $u_{n+1} \geqslant 1$: la propriété est héréditaire.

La propriété est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang n, elle est vraie au rang $n + 1$: d'après la principe de récurrence, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.

3. Démontrer que, pour tout entier nature n, $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{10}{u_n+4} - u_n = 3 - u_n - \frac{10}{u_n+4} = \frac{(3-u_n)(u_n+4)-10}{u_n+4} = \frac{-u_n^2-u_n+12-10}{u_n+4} = \frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4}$.
Le trinôme a deux racines évidentes 1 et -2 ; il se factorise donc en :
$-u_n^2 - u_n + 2 = (-u_n + 1)(u_n + 2)$ et finalement :
$u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

4. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)

On a démontré à la question **2.** que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, donc $u_n + 4 > 0$, $u_n + 2 > 0$ et $u_n \geqslant 1$ entraîne $1 - u_n < 0$ et donc finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$, ce qui démontre que la suite (u_n) est décroissante.

5. Justifier que la suite (u_n) converge.

La suite (u_n) est décroissante et minorée par 1 : elle converge donc vers une limite qui est supérieure ou égale à 1.

Partie B :

On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

1. (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

Pour tout naturel $n \in \mathbb{N}$, on a $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{3-\frac{10}{u_n+4}-1}{3-\frac{10}{u_n+4}+2} = \frac{2-\frac{10}{u_n+4}}{5-\frac{10}{u_n+4}} = \frac{\frac{2u_n+8-10}{u_n+4}}{\frac{5u_n+20-10}{u_n+4}} = \frac{\frac{2u_n-2}{u_n+4}}{\frac{5u_n+10}{u+4}} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} = \frac{2}{5}\frac{u_n-1}{u_n+2} = \frac{2}{5}v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$, vraie pour tout naturel n, démontre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4$ et de premier terme $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{4}{7}$.

(b) Exprimer v_n en fonction de n.

On sait que pour tout naturel n, $v_n = v_0 \times 0,4^n = \frac{4}{7} \times 0,4^n$.

En déduire que pour tout entier naturel n, $v_n \neq 1$.

Comme $\frac{4}{7} < 1$ et $0{,}4 < 1$ et par conséquent $0,4^n < 1$, on peut en déduire que $v_n < 1$, donc en particulier $v_n \neq 1$.

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{2v_n+1}{1-v_n}$.

On part de la définition :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Leftrightarrow v_n(u_n + 2) = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow v_n u_n - u_n = -2v_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n(v_n - 1) = -2v_n - 1 \Leftrightarrow u_n = \frac{-2v_n-1}{v_n-1} \Leftrightarrow u_n = \frac{2v_n+1}{1-v_n} \text{ car } v_n \neq 1.$$

3. En déduire la limite de la suite (u_n).

$v_n = \frac{4}{7} \times 0,4^n$. On sait comme $0 < 0{,}4 < 1$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}4^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2v_n + 1 = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - v_n = 1$ et finalement $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1} = 1$.

Partie C :

On considère l'algorithme ci-dessous.

$u \leftarrow 5$
$n \leftarrow 0$
Tant que $u \geqslant 1{,}01$
  $n \leftarrow n + 1$
  $u \leftarrow 3 - \dfrac{10}{u + 4}$
Fin du Tant que

1. Après exécution de l'algorithme, quelle valeur est contenue dans la variable n ?

À la fin on a $n = 6$.

2. À l'aide des parties A et B, interpréter cette valeur.

La suite (u_n) est décroissante et tend vers 1 : on a $u_5 \approx 1{,}017$; la valeur suivante est inférieure à 1,01 : $u_6 \approx 1{,}008$.

Exercice 2 (3 points)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$. Dans ce qui suit, z désigne un nombre complexe.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer sur la copie si elle est vraie ou si elle est fausse. Justifier. Toute réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : L'équation $z - i = i(z+1)$ admet une solution réelle.

$$z - i = i(z+1) \iff z - i = iz + i \Leftrightarrow z - iz = 2i \Leftrightarrow z(1-i) = 2i \Leftrightarrow z = \frac{2i}{1-i}$$

$$\iff z = \frac{2i(1+i)}{2} \Leftrightarrow z = i(i+1) \Leftrightarrow z = i^2 + i \Leftrightarrow \boxed{z = -1 + i}$$

Affirmation FAUSSE

Affirmation 2 : L'équation $2z^2 - 3z + 5 = 0$ admet deux solutions dont les images sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 5 = 9 - 40 = -31 < 0$ donc l'équation admet 2 solutions complexes conjuguées.

On sait que les points image d'un nombre complexe et de son conjugué sont symétrique par rapport à l'axe des abscisses et non par rapport à l'origine du repère.

Affirmation FAUSSE

Affirmation 3 : Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé, les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = \sqrt{2} + 3i$, $z_B = 1 + i$ et $z_C = -4i$ ne sont pas alignés.

Les points A, B, C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

$\overrightarrow{AB}(z_B - z_A) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(1 + i - \sqrt{2} - 3i\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(1 - \sqrt{2} - 2i\right)$ ou en coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{AB}\left(1 - \sqrt{2}\,;\, -2\right)$

$\overrightarrow{BC}(z_C - z_B) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}(-4i - 1 - i) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC}(-1 - 5i)$ ou en coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{BC}(-1\,;\,-5)$

On cherche s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AB} = k \times \overrightarrow{AC}$ soit $\begin{cases} 1 - \sqrt{2} = k \times (-1) \\ -2 = k \times (-5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1 + \sqrt{2} \\ k = \frac{2}{5} \end{cases}$ ce qui est impossible puisque $-1 + \sqrt{2} \neq \frac{2}{5}$. Par conséquent les points A, B et C ne sont pas alignés.

Affirmation VRAIE

Exercice 3 (7 points)

Partie A – Conjectures

On donne en annexe la représentation graphique C_f de la fonction $f : x \longmapsto \frac{x^3+1}{4x^2-1}$

Quelles conjectures pouvez-vous faire concernant :

- L'ensemble de définition de f
- Les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
- Les variations de f.

On pourra résumer ces informations dans un tableau.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		$1{,}4$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$0{,}55$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B – Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur **P** par : $g(x) = 4x^3 - 3x - 8$.

1. Étudier le sens de variation de g sur P ainsi que les limites de g en $+$ et $-\infty$.
   En déduire le tableau de variation de g.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme et

$$g'(x) = 12x^2 - 3 = 3(4x^2 - 1) = 3(2x - 1)(2x + 1).$$

On peut en déduire le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3(2x-1)(2x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ce qui permet d'en déduire que g est strictement croissante sur $\left]-\infty\,;-\frac{1}{2}\right]$ et sur $\left[\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ et décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right]$.

- $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

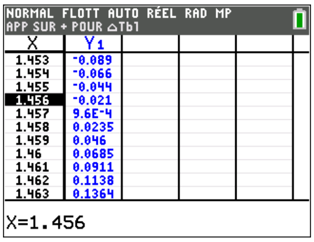
On peut alors dresser le tableau des variations de g :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de g	$-\infty$	$\nearrow$	-7	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans **P** une unique solution que l'on note α. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.

- Sur $\left]-\infty\,;\frac{1}{2}\right]$, $f(x) \leq -7$ donc $f(x) \neq 0$ sur cet intervalle.
- Sur $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$ f est continue est strictement croissante. De plus $f\left(\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[\right) = [-9\,;\ +\infty[$ et on a bien $0 \in f\left(\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[\right)$.

  On peut donc affirmer, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution située dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.
- Conclusion : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.



À l'aide de la calculatrice, on trouve : $1{,}456 < \alpha < 1{,}457$.

3. Déterminer le signe de g sur **P**.

De ce qui précède on peut en déduire :

x	$-\infty$		$\alpha \approx 1{,}457$		$+\infty$
Signe de $4x^3 - 3x - 8$		$-$	0	$+$	

Partie C – Étude des variations de f

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$

1. Montrer que f est définie sur $D_f = \mathbb{R}/\left\{-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right\}$.

La fonction f est définie si et seulement si $4x^2 - 1 \neq 0$.

Or $4x^2 - 1 = (2x-1)(2x+1)$ donc $4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2}\ \ ou\ \ x = \frac{1}{2}\right)$.

Par conséquent f est définie si $x \neq \frac{1}{2}$ et si $x \neq -\frac{1}{2}$ c'est-à-dire sur $\mathbb{R}/\left\{-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right\}$.

2. Après avoir étudier le signe de $4x^2 - 1$ sur D_f, déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Quelle interprétation graphique peut-on faire de ces résultats.

Le signe de $4x^2 - 1$ a déjà été étudié à la question A)1) :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $4x^2 - 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- Limites à l'infini :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et de la même façon, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- Limite en $-\frac{1}{2}$:

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} (x^3+1) = \frac{7}{8}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ x<-\frac{1}{2}}} (4x^2-1) = 0^+$ (d'après le tableau) donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ x<-\frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$

De la même façon, $\lim\limits_{\substack{x\to-\frac{1}{2} \\ x>-\frac{1}{2}}} f(x) = -\infty$

- Limite en $\frac{1}{2}$:

$\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (x^3+1) = \frac{9}{8}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} (4x^2-1) = 0^-$ (d'après le tableau) donc, par quotient, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x < \frac{1}{2}}} f(x) = -\infty$

De la même façon, $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{1}{2} \\ x > \frac{1}{2}}} f(x) = +\infty$

On peut déduire que la courbe C_f admet deux asymptotes verticales, l'une d'équation $x = -\frac{1}{2}$ et l'autre d'équation $x = \frac{1}{2}$.

3. Justifier que f est continue et dérivable sur D_f et montrer que $f'(x) = \frac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$.

En tant que quotient (dénominateur non nul) de deux fonctions continues et dérivables sur D_f, la fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}/\left\{-\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right\}$.

$$f'(x) = \frac{3x^2(4x^2-1)-(x^3+1)(8x)}{(4x^2-1)^2} = \frac{12x^4-3x^2-8x^4-8x}{(4x^2-1)^2} = \frac{4x^4-3x^2-8x}{(4x^2-1)^2}$$
$$= \frac{x(4x^3-3x-8)}{(4x^2-1)^2} = \frac{xg(x)}{(4x^2-1)^2}$$

4. Étudier le signe de f' et en déduire le sens variation de f sur D_f.

Le signe f' est le même que celui de $xg(x)$ car $(4x^2-1)^2 > 0$.
On connait le signe de g (question A.3.) , on peut donc dresser le tableau de signe suivant.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
Signe de x		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$		$+$	
Signe de $4x^3-3x-8$		$-$	$\Vert$	$-$		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Signe de f'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Dresser le tableau complet des variations de f.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		α		$+\infty$
Signe de f'		$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty \Vert -\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie D

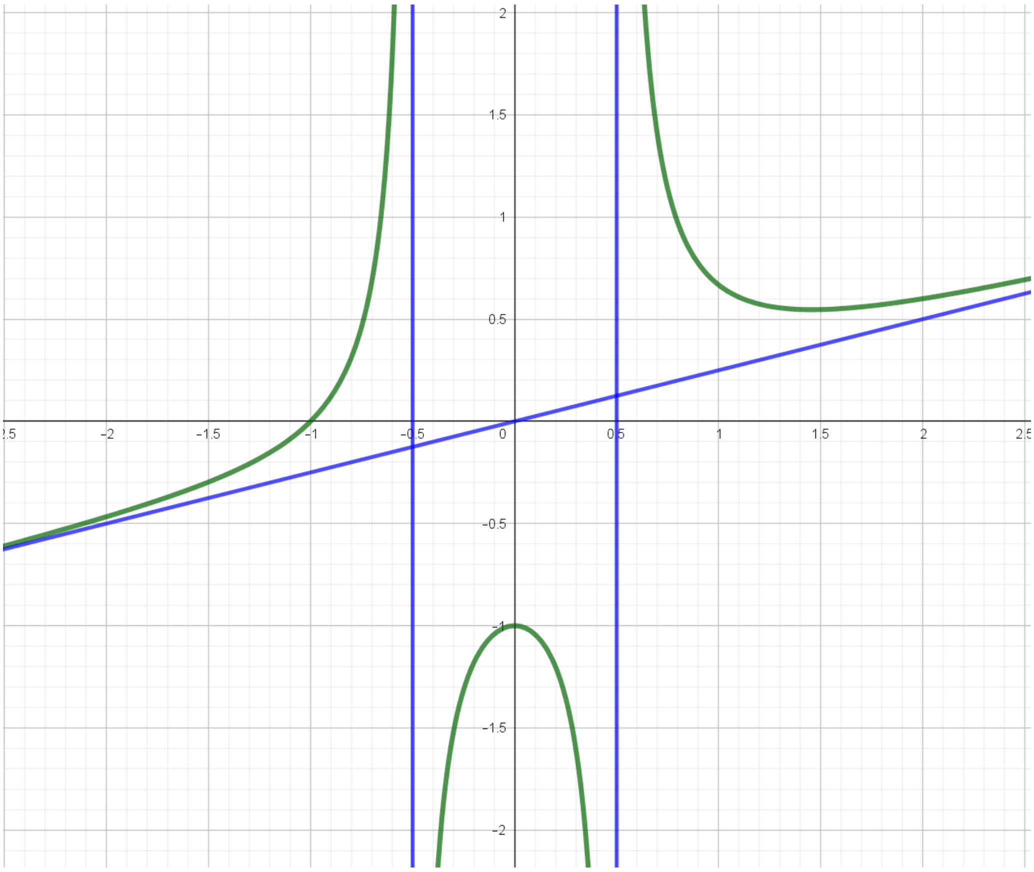
1. Montrer que pour tout x de D_f, $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{x+4}{4(4x^2-1)}$.

Pour tout x de D_f, $\frac{1}{4}x + \frac{x+4}{4(4x^2-1)} = \frac{x(4x^2-1)}{4(4x^2-1)} + \frac{x+4}{4(4x^2-1)} = \frac{4x^3-x+x+4}{4(4x^2-1)} = \frac{4x^3+4}{4(4x^2-1)} = \frac{4(x^3+1)}{4(4x^2-1)} = \frac{x^3+1}{4x^2-1}$

Donc $f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{x+4}{4(4x^2-1)}$.

2. Soit (D) la droite d'équation $y = \frac{1}{4}x$.

a. Tracer la droite (D) ainsi que les asymptotes de C_f dans le repère donner en annexe.



b. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - \frac{1}{4}x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x) - \frac{1}{4}x\right)$.

Quelle interprétation graphique peut-on faire de ces deux résultats.

$$f(x) = \frac{1}{4}x + \frac{x+4}{4(4x^2-1)} \text{ donc } f(x) - \frac{1}{4}x = \frac{x+4}{4(4x^2-1)} = \frac{x+4}{16x^2-4}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x) - \frac{1}{4}x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+4}{16x^2-4}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{16x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{16x} = 0$$

On peut en déduire que la courbe C_f et la droite (D) sont « confondues » lorsque x tend vers l'infini.

Exercice 4 de spécialité (5 points)

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Partie A

Alex retrouve d'autres personnes, ayant le même jeu, dans le parc de la ville dans le but de comparer le nombre de créatures qu'ils ont combattues.
Le premier jour, 8 personnes se sont retrouvées dans le parc. Le second jour, on comptait 25 personnes et le troisième jour, 80 personnes se sont retrouvées dans le parc.
Soit f la fonction définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$, où a, b et c sont trois nombres réels et x un nombre entier compris entre 1 et 10. On admet que la fonction f modélise le nombre de personnes qui se retrouvent dans le parc le x-ième jour.

1. Traduire l'énoncé par un système de trois équations à trois inconnues a, b et c.

D'après l'énoncé a, b et c doivent vérifier :

$$\begin{cases} f(1) = 8 \\ f(2) = 25 \\ f(3) = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c & = & 8 \\ 4a + 2b + c & = & 25 \\ 9a + 3b + c & = & 80 \end{cases}$$

2. Vérifier que ce système est équivalent à l'équation $AX = B$ avec :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + b + c & = & 8 \\ 4a + 2b + c & = & 25 \\ 9a + 3b + c & = & 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix}$$

3. Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

(a) Calculer $M \times A$.

$$M \times A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

(b) Que représente la matrice M pour la matrice A ?

$M \times A = I$ donc M est la matrice inverse de A soit $M = A^{-1}$.

4. Le parc de la ville a une capacité d'accueil de 2500 personnes.
Selon ce modèle, le parc risque-t-il de refuser d'accueillir des personnes un de ces dix jours ?
Justifier la réponse.

On détermine la matrice X afin d'obtenir les trois inconnues a, b et c.

$$AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 8 \\ 25 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ -40 \\ 29 \end{pmatrix}$$

Donc $f(x) = 19x^2 - 40x + 29$.

A l'aide de la calculatrice, on peut faire un tableau des valeurs prises par f:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x)$	8	25	80	173	304	473	680	925	1208	1529

On voit donc que le parc ne rique pas de refuser d'acceuillir des personnes sur un de ces dix jours

Partie B

On considère la matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

1. Après avoir justifié que la matrice P est inversible, calculer la matrice P^{-1} à l'aide de la calculatrice.

$\det(P) = (-1) \times (-3) - 1 \times 1 = 2 \neq 0$ donc P est inversible.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

2. Montrer que $P \times D \times P^{-1} = A$.

$$PD = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{3}{2} & \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} + \frac{9}{2} & -\frac{1}{2} + \frac{9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = A$$

3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul, $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note (P_n) : $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$.

Initialisation

Pour $n = 1$: $PDP^{-1} = A$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité

Soit un entier naturel n non nul. On suppose que $P(n)$ est vraie donc que $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$

On a alors :

$$A^{n+1} = A^n \times A = (P \times D^n \times P^{-1}) \times PDP^{-1} = P \times D^n \times I_2 \times D \times P^{-1} = P \times D^{n+1} \times P^{-1}$$

On a démontré que (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion

Pour tout entier naturel n , $A^n = P \times D^n \times P^{-1}$

4. On admet que, pour tout entier naturel n non nul, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Calculer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3^n \\ 1 & -3^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$A^n = P \times D^n \times P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3^n \\ 1 & -3^{n+1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \times 3^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 3^n \\ -3 + \frac{1}{2} \times 3^{n+1} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 3^{n+1} \end{pmatrix}$$