BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION DE 2019/2020

BAC BLANC

MATHÉMATIQUES

SÉRIE: S – SVT

Spécialité Maths

DURÉE DE L'ÉPREUVE : 4 HEURES **COEFFICIENT : 9**

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 .

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée

Le candidat doit traiter les QUATRE exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Tournez la page S.V.P.

Exercice 1 (*4 points*)

Un institut effectue un sondage pour connaître, dans une population donnée, la proportion de personnes qui sont favorables à un projet d'aménagement du territoire. Pour cela, on interroge un échantillon aléatoire de personnes de cette population, et l'on pose une question à chaque personne.

Les deux parties sont relatives à cette même situation, mais peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A : Nombre de personnes qui acceptent de répondre au sondage

On admet dans cette partie que la probabilité qu'une personne interrogée accepte de répondre à la question est égale à 0,6.

1. L'institut de sondage interroge 700 personnes. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes interrogées qui acceptent de répondre à la question posée.
(a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? Justifier la réponse.
(b) Quelle est la meilleure approximation de $P(X \geq 400)$ parmi les nombres suivants ?

$$0{,}92 \qquad 0{,}93 \qquad 0{,}94 \qquad 0{,}95$$

2. A l'aide de la calculatrice, déterminer combien de personnes l'institut doit interroger au minimum pour garantir, avec une probabilité supérieur à 0,9, que le nombre de personnes répondant au sondage soit supérieur ou égal à 400.

Partie B : Correction due à l'insincérité de certaines réponses

Dans cette partie, on suppose que, parmi les personnes sondées qui ont accepté de répondre à la question posée, 29 % affirment qu'elles sont favorables au projet.
L'institut de sondage sait par ailleurs que la question posée pouvant être gênante pour les personnes interrogées, certaines d'entre elles ne sont pas sincères et répondent le contraire de leur opinion véritable. Ainsi, une personne qui se dit favorable peut :

- soit être en réalité favorable au projet si elle est sincère.
- soit être en réalité défavorable au projet si elle n'est pas sincère.

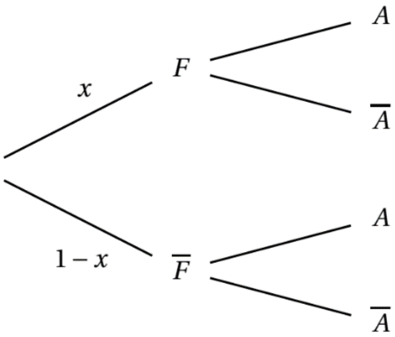
Par expérience, l'institut estime à 15 % le taux de réponses non sincères parmi les personnes ayant répondu, et admet que ce taux est le même quelle que soit l'opinion de la personne interrogée.
Le but de cette partie est, à partir de ces données, de déterminer le taux réel de personnes favorables au projet, à l'aide d'un modèle probabiliste. On prélève au hasard la fiche d'une personne ayant répondu, et on définit :

- F l'évènement la personne est en réalité favorable au projet ;
- $\overline{F}$ l'évènement la personne est en réalité défavorable au projet ;
- A l'évènement la personne affirme qu'elle est favorable au projet;
- $\overline{A}$ l'évènement la personne affirme qu'elle est défavorable au projet.

Ainsi, d'après les données, on a $p(A) = 0{,}29$.

1. En interprétant les données de l'énoncé, indiquer les valeurs de $P_F(A)$ et $P_{\overline{F}}(A)$.

2. On pose $x = P(F)$.
(a) Reproduire sur la copie et compléter l'arbre de probabilité ci-contre.



(b) En déduire une égalité vérifiée par x.

3. Déterminer, parmi les personnes ayant répondu au sondage, la proportion de celles qui sont réellement favorables au projet.

Exercice 2 (6 points)

Partie 1

Soit g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = e^x - xe^x + 1$.

1. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction g.
3. Donner le tableau de variations de g.
4. **a.** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet sur $[0\ ;\ +\infty[$ une unique solution. On note α cette solution.

   b. À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.

   c. Démontrer que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie 2

Soit A la fonction définie et dérivable sur $[0\ ;\ +\infty[$ telle que $A(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$.

1. Démontrer que pour tout réel x positif ou nul, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$, où g est la fonction définie dans la partie 1.
2. En déduire les variations de la fonction A sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Partie 3

On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$. On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. La figure est donnée ci-dessous.

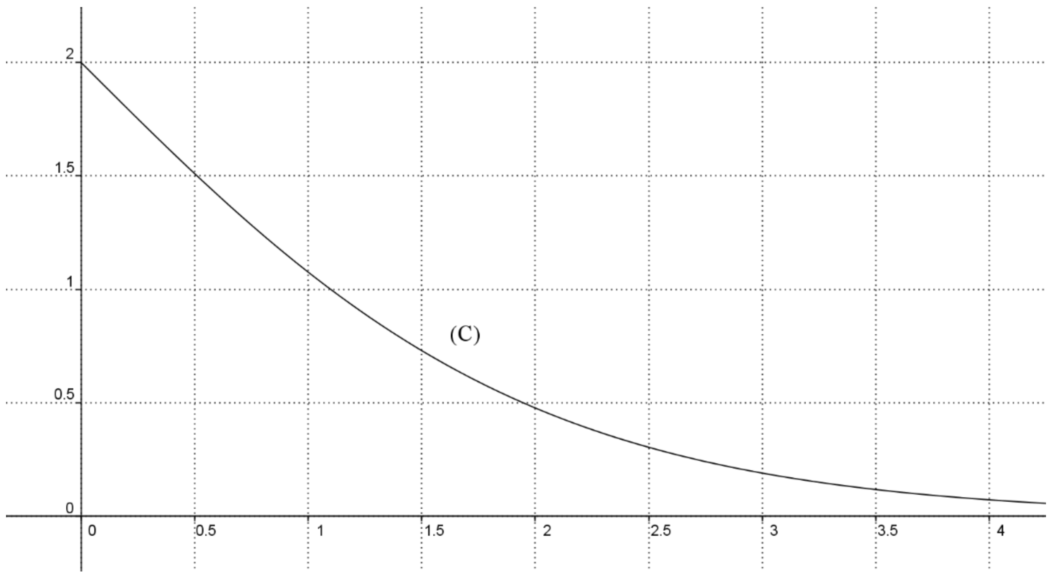
Pour tout réel x positif ou nul, on note :

M le point de (C) de coordonnées $(x\ ;\ f(x))$,

P le point de coordonnées $(x\ ;\ 0)$,

Q le point de coordonnées $(0\ ;\ f(x))$.

Démontrer que l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale lorsque M a pour abscisse α.



Exercice 3 (5 points)

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et pour tout entier naturel n:

$$z_{n+1} = (1 + \mathrm{i})z_n$$

Les parties A et B peuvent être traitées de façon indépendante.

Partie A

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.

1. Calculer u_0.
2. Démontrer que (u_n) est la suite géométrique de raison $\sqrt{2}$ et de premier terme 2.
3. Pour tout entier naturel n, exprimer u_n en fonction de n.
4. Déterminer la limite de la suite (u_n).
5. Étant donné un réel positif p, on souhaite déterminer, à l'aide d'un algorithme, la plus petite valeur de l'entier naturel n telle que $u_n > p$.
   Recopier l'algorithme ci-dessous et le compléter par les instructions de traitement et de sortie, de façon à afficher la valeur cherchée de l'entier n.

```
Saisir p
n ← 0
u ← 2
   ⋮
   ⋮
```

Partie B

1. Déterminer la forme algébrique de z_1.
2. Déterminer la forme exponentielle de z_0 et de $1 + \mathrm{i}$.
   En déduire la forme exponentielle de z_1.
3. Déduire des questions précédentes la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 4 (5 points)

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.

Le nombre $3a - 5b$ est appelé le déterminant de M. On le note $\det(M)$.

Ainsi $\det(M) = 3a - 5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M) \neq 0$ et on pose $N = \frac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3 & -b \\ -5 & a \end{pmatrix}$.
   Justifier que N est l'inverse de M.

2. On considère l'équation (E) : $\det(M) = 3$.
   On souhaite déterminer tous les couples d'entiers $(a\,;b)$ solutions de l'équation (E).
   (a) Vérifier que le couple $(6\,;3)$ est une solution de (E).
   (b) Montrer que le couple d'entiers $(a\,;b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a-6) = 5(b-3)$.
   (c) Montrer que les couples $(6+5k\,;3+3k)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions de (E).

Partie B

1. On pose $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

En utilisant la partie A, déterminer la matrice inverse de Q.

2. *Codage avec la matrice* Q

Pour coder un mot de deux lettres à l'aide de la matrice $Q = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ on utilise la procédure ci-après :

étape 1 : On associe au mot la matrice $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ où x_1 est l'entier correspondant à la première lettre du mot et x_2 l'entier correspondant à la deuxième lettre du mot selon le tableau de correspondance ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

étape 2 : La matrice X est transformée en la matrice $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ telle que $Y = QX$.

étape 3 : La matrice Y est transformée en la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ telle que r_1 est le reste de la division euclidienne de y_1 par 26 et r_2 est le reste de la division euclidienne de y_2 par 26.

étape 4 : À la matrice $R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \end{pmatrix}$ on associe un mot de deux lettres selon le tableau de correspondance de l'étape 1.

$$\text{Exemple : JE} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow Y = \begin{pmatrix} 66 \\ 57 \end{pmatrix} \rightarrow R = \begin{pmatrix} 14 \\ 5 \end{pmatrix} \rightarrow \text{OF}.$$

Le mot JE est codé en le mot OF.

<u>Question</u> : Coder le mot DO.

3. *Procédure de décodage*

On conserve les mêmes notations que pour le codage.

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que $Y = QX$.

(a) Démontrer que $3X = 3Q^{-1}Y$ puis que $\begin{cases} 3x_1 \equiv 3r_1 - 3r_2 \ [26] \\ 3x_2 \equiv -5r_1 + 6r_2 \ [26] \end{cases}$

(b) En remarquant que $9 \times 3 \equiv 1 \ [26]$, montrer que $\begin{cases} x_1 \equiv r_1 - r_2 \ [26] \\ x_2 \equiv 7r_1 + 2r_2 \ [26] \end{cases}$

(c) Décoder le mot SG.