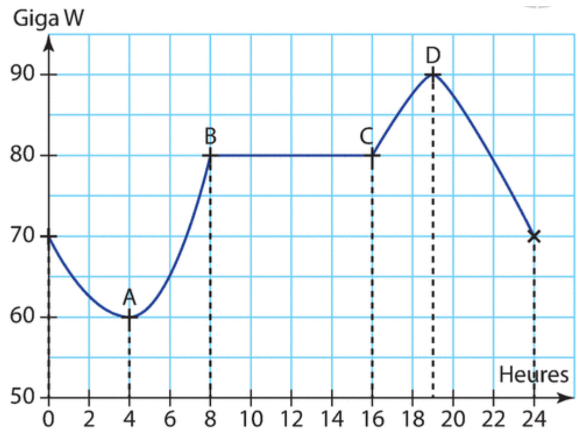
Dérivation
Activités préparatoires

Activité 1 : Calculer un taux de variation

La consommation énergétique (en GigaWatt) des Français pendant une journée de semaine, en fonction des heures de la journée, peut être modélisée par une fonction f dont la courbe est représentée ci-contre.

1. Sur quelles périodes (ou intervalles) la consommation est-elle croissante ?
2. Peut-on dire que sa croissance est « plus rapide » sur un de ces deux intervalles ?
3. Calculer l'accroissement moyen (ou taux de variation) de la consommation entre 4 h et 8 h, c'est-à-dire $\frac{f(8)-f(4)}{8-4}$. Recommencer entre 16 h et 19 h, c'est-à-dire $\frac{f(19)-f(16)}{19-16}$.
   Que peut-on observer ? Cela confirme-t-il la réponse à la question précédente ?
4. Les points A, B, C et D sur la courbe ont été placés aux abscisses respectives 4 ; 8 ; 16 ; 19. À quoi correspond le coefficient directeur de la droite (AB) ? celui de la droite (CD) ?
5. Donner les intervalles sur lesquels la fonction est décroissante.
6. Calculer le taux de variation sur chacun de ces intervalles. Que peut-on constater ?



Activité 2 : Calculer un accroissement moyen, une vitesse moyenne

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = 32x^3 - 90x^2 + 100x$.
Traiter au choix la partie A ou la partie B en fonction de l'approche qui vous convient (économique ou physique), puis traiter la partie C.

I. Approche économique

Une entreprise a pu modéliser le coût énergétique (en euros) d'une imprimante 3D en fonction du temps d'utilisation (en heures) sur une période de deux heures, par la fonction f.

1. Quel est le coût énergétique pour 2 heures d'utilisation ?
2. Calculer l'accroissement moyen du coût pendant les deux heures d'utilisation, c'est-à dire $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}$.
3. Calculer l'accroissement moyen pour chaque demi-heure.
   Recopier et compléter le tableau.

	[0 ; 0,5]	[0,5 ; 1]	[1 ; 1,5]	[1,5 ; 2]
Accroissement moyen du coût				

   Peut-on affirmer que l'accroissement moyen du coût énergétique n'a jamais dépassé les 90 €/h ?

4. On souhaite maintenant calculer l'accroissement moyen du coût énergétique pour des durées h très courtes, au bout d'une demi-heure d'utilisation de la machine, lorsqu'elle a fonctionné entre 0,5 heure et $(0,5 + h)$ heure, c'est-à-dire $\frac{f(0,5+h)-f(0,5)}{h}$.

Calculer cet accroissement moyen lorsque $h = 0{,}01$, puis lorsque $h = 0{,}001$. Vers quelle valeur semble tendre l'accroissement moyen lorsque h tend vers 0 ?

II. Approche physique

Soit la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 2] par $f(x) = 32x^3 - 90x^2 + 100x$.
Un automobiliste a pu modéliser la distance parcourue (en kilomètres) en fonction du temps écoulé (en heures) d'un trajet de deux heures, par la fonction f.

1. Quelle est la distance parcourue au bout des deux heures ?
2. Calculer sa vitesse moyenne.
3. Calculer la vitesse moyenne pour chaque demi-heure. Recopier et compléter le tableau.

	[0 ; 0,5]	[0,5 ; 1]	[1 ; 1,5]	[1,5 ; 2]
Vitesse moyenne				

   Peut-on affirmer que l'automobiliste n'a jamais dépassé les 90 km/h ?
4. L'automobiliste a démarré son trajet à 10 h. On cherche à savoir à quelle vitesse roulait la voiture à 10 h 30 (c'est-à-dire une demi-heure après son départ). Pour cela, on va calculer la vitesse moyenne de la voiture entre l'instant 0,5 (correspondant à 10 h 30) et l'instant $(0{,}5 + h)$ (où h est un petit nombre positif), c'est-à-dire $\frac{f(0{,}5+h)-f(0{,}5)}{h}$.
   Calculer cette vitesse moyenne lorsque $h = 0{,}01$, puis lorsque $h = 0{,}001$. Vers quelle valeur semble tendre la vitesse moyenne lorsque h tend vers 0 ?

III. Vérification graphique

On souhaite confirmer les résultats à l'aide de GeoGebra.

1. Saisir f(x)=Fonction[32x^3-90^2+100x,0,2]
2. Ajuster les unités sur chaque axe : clic droit sur le graphique, puis « axe X : axeY » et sélectionner « 1:100 ».
3. Pour vérifier la réponse à la question 2. de la première partie, placer deux points A et B aux extrémités de la courbe et lire le coefficient directeur de la droite (AB) à l'aide de l'outil « pente ».
4. Pour vérifier le résultat de la question 4. (Partie A ou B):
   a) Construire le point M (0,5 ; f(0,5)).
   b) Créer un curseur h variant de -0,1 à 0,1 avec un incrément de 0,001.
   c) Construire le point N (0,5 + h ; f(0,5 + h)).
   d) Tracer la droite (MN) et afficher son coefficient directeur.
   e) En faisant varier le curseur, rapprocher le plus possible le point N du point M sans qu'ils ne soient confondus.
   Vérifier que le résultat correspond à celui trouvé dans la partie précédente.
   Cette « ultime droite » obtenue lorsque les deux points sont (presque) confondus s'appelle la tangente à la courbe.