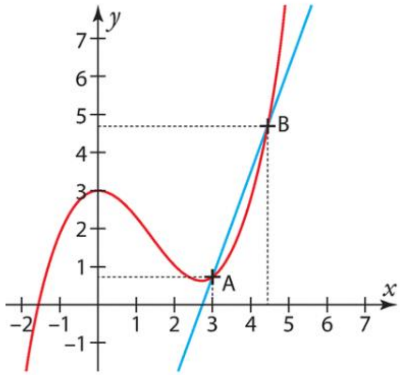
Dérivation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O\ ;\ I, J)$. a et b désignent des réels de l'intervalle I. A et B sont des points de la courbe (C_f) d'abscisses $x_A = a$ et $x_B = b$.

I. Taux de variation d'une fonction



Définition 1 - Taux de variation d'une fonction entre a et b

On appelle taux de variation de f entre a et b le quotient :

… … … … … … …

On le note parfois … … … … … …

Remarque

Le taux de variation de f entre a et b correspond au ……………………
de la droite (AB) sécante à la courbe (Cf) en A et B, c'est-à-dire $m =$ … … … … .. .

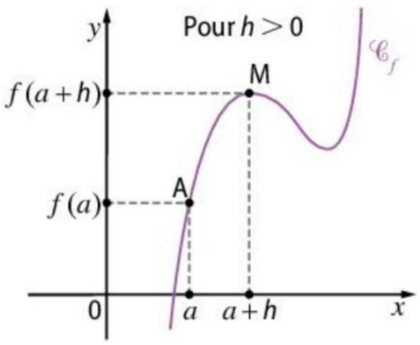
Exemple

Le taux de variation de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 3x + 2$ entre 4 et 7

Remarque :

Pour $h \neq 0$, on peut poser $b = a + h$ et le taux de variation entre a et b peut s'appeler le taux de variation entre a et $a + h$. On a alors :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \text{… … … … … … … … … … … … … … … … ….}$$



Pour toute la suite du chapitre, les points :
$A(a\ ; f(a))$ et $M(a + h\ ; f(a + h))$ appartiennent à la courbe (C_f).

Définition 2 - Taux de variation d'une fonction entre a et $a + h$

Pour $h \neq 0$, on appelle taux de variation de f entre a et $a + h$ le quotient :

… … … … … … … … … ….

Définition et Propriété – Sécante à la courbe

- La droite (AM) est appelèe ……………………………..
- Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à … … … … … … … … …

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ n'est pas défini pour $h \neq 0$.
Cela se traduit géométriquement par le fait qu'on ne peut pas définir de droite unique passant par A.
Un des buts du chapitre est de donner un sens à la « position limite des sécantes (AM) lorsque M tend vers A », c'est-à-dire lorsque « le nombre h tend vers 0 ». Pour cela, on introduit la **notion de limite**.

II. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Soit fune fonction définie sur un intervalle I et (Cf) sa courbe représentative dans un repère $(O\ ;\ I, J)$. a et b désignent des réels de l'intervalle I. A et B sont des points de la courbe (C_f) d'abscisses $x_A = a$ et $x_B = b$.

Définition - Nombre dérivé

Soit h un réel non nul tel que $a + h$ appartienne à l'intervalle I.
On dit que f est dérivable en a si et seulement si le ……………………… f entre a et $a + h$ tend vers un ……………………………………………………...
Ce nombre réel est appelé ………………………… en a et se note … … … … … … … ..
On écrit :

… ..

Remarques :

- L'expression « tend vers un nombre » signifie « ………………………………………………… ».
- On peut dire aussi que f est dérivable en a si et seulement si le taux de variation entre a et x tend vers un unique nombre réel $f'(a)$ lorsque x tend vers a : … … … … … … … … … … … … ..

Exemples

① Considérons la fonction $f\ :\ x \longmapsto x^2$ en $a = 3$.

② Considérons la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f\ :\ x \longmapsto \sqrt{x}$ en $a = 0$.

Exercice résolu 1page 124 (Sésamath)

Remarque

La définition du nombre dérivé peut s'interpréter de la façon suivante :
Si on nomme M le point de la courbe (C_f) d'abscisse $x = a + h$ alors, lorsqu'on ……………………… M du point A sur la courbe (C_f) jusqu'à ce qu'ils soient « presque » confondus, la « sécante ultime » (AM) (figure ci-dessous) a pour coefficient directeur $f'(a)$.

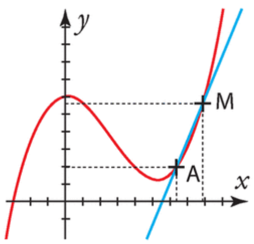


Figure 1

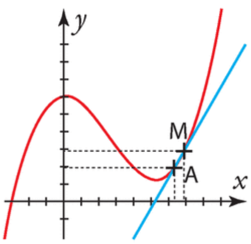


Figure 2

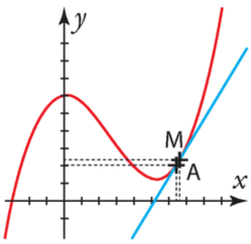


Figure 3

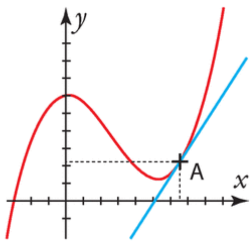
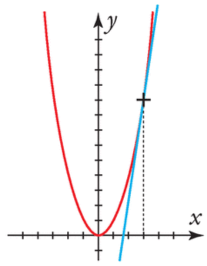


Figure 4

III. Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O\ ;\ I, J)$.
a et b désignent des réels de l'intervalle I.
A et B sont des points de la courbe (C_f) d'abscisses $x_A = a$ et $x_B = b$.



Définition

La droite passant par le point A et ayant pour coefficient directeur … … … … … ..
s'appelle la ………………………………………… (ou au point d'abscisse a).

Exemple

La courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est une parabole qu'on nommera $\mathcal{P}$.
Si on place sur cette courbe le point A d'abscisse 3, alors la droite passant par A et qui a pour coefficient directeur 6 (car d'après l'exemple précédent $f'(3) = 6$) est la tangente à $\mathcal{P}$ en A.

Théorème – Équation réduite de la tangente

La tangente à la courbe (C_f) en A a pour équation réduite $y =$ … … … … … … … … … … … ….

Démonstration

….

Remarque

Sachant qu'au « voisinage de a » la courbe (C_f) et sa tangente en a sont presque confondues, on dit que $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est une approximation affine de f au voisinage de a.
On a alors, pour tout réel x très proche du réel a, $f(x) \approx$ … … … … … … … … … … ….
On peut aussi écrire, si on pose $a + h$ avec h proche de 0, $f(a + h) \approx$ … … … … … … … … … ….

IV. Fonction dérivée

1. Fonction dérivée sur un intervalle

Définition – Fonction dérivée

On dit qu'une fonction est **…………………………………………..** si elle est dérivable en tout réel a de I.
Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I.
On appelle **…………………………………………**, et on la note f', la fonction qui à tout réel x de I associe le réel … … … … ..

Exemple

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Soit a un réel et h un réel non nul.
…

2. Fonction dérivée des fonctions de référence

Théorèmes - Dérivées des fonctions de référence

① Soit c un réel. La fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x, $f'(x) =$ … … ..

② Soit m un réel. La fonction « identité » définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x, $f'(x) =$ … ….

③ La fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x, $f'(x)$ … … …

④ La fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et on a, pour tout réel x, $f'(x)$ … … … ….

⑤ La fonction racine carrée définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, et on a, pour tout réel x strictement positif, $f'(x)$ … … … ….

⑥ Pour tout entier relatif n, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ si n est négatif) par $f : x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ si n est négatif) , et on a, pour tout réel x (non nul si n est négatif), $f'(x) =$ … … … …

Fonction		Définie sur	Dérivable sur	Fonction dérivée
Constante	$f : x \longmapsto c$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto$ …
Linéaire	$f : x \longmapsto mx$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto$ …
Affine	$f : x \longmapsto mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto$ …
Carré	$f : x \longmapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto$ …
Cube	$f : x \longmapsto x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto$ …
Second degré	$f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f' : x \longmapsto$ …
Puissance avec n entier relatif non nul.	$f : x \longmapsto x^n$	$\mathbb{R}$ si n est positif. $\mathbb{R}^*$ si n est négatif	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $\mathbb{R}^*$ si $n < 0$	$f' : x \longmapsto$ …
Inverse	$f : x \longmapsto {}^1/_x$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f' : x \longmapsto$ …
Racine carrée	$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	$[0\ ;\ +\infty[$	$]0\ ;+\infty[$	$f' : x \longmapsto$ …

Exemple

Soit la fonction $f : x \longmapsto x^3$.

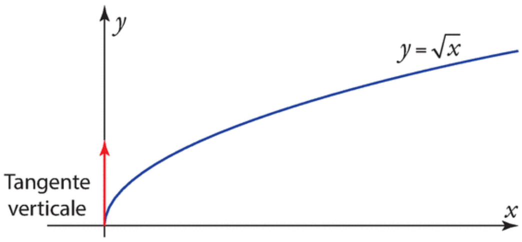
Démonstration

Soit la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$ Soit a et h deux réels non nuls tels que $a + h$ soit non nul.

…

Remarque

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



$V.$ Opérations et dérivation

1. Dérivée d'une somme de fonctions

Théorème - Dérivée d'une somme

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction « somme » $u + v : x \longmapsto$ … … … … … .. est dérivable sur I. Et on a, pour tout réel x de I,

$$(u + v)'(x) = \text{… … … … … … ….}$$

On peut aussi noter $(u+v)' =$ … … … … … ….

Exemple

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^3 + \frac{1}{x}$.

2. Dérivée d'un produit de fonctions

Théorème - Dérivée d'un produit

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction « produit » $uv : x \longmapsto$ … … … … … … est dérivable sur I.

Et on a, pour tout réel x de I :

$$(uv)'(x) = \text{… … … … … … … … … … ..}$$

On note aussi $(uv)' =$ … … … … … … … …

Démonstration

Soit a un réel de I et h un réel non nul tel que $a + h$ appartient à I.

Étudions le taux de variation de la fonction (uv) entre a et $a + h$:

…

Exemple

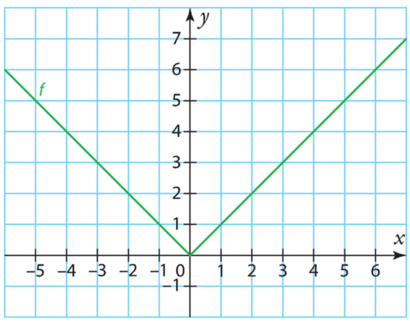
Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$.

Remarques

① Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et si k est une constante réelle alors la fonction $ku : x \longmapsto k \times u(x)$ est dérivable sur I. Et on a, pour tout réel x de I, $(ku)'(x) =$ … … … … … ….
On note $(ku)' =$ … … … … … …

② Conséquence des théorèmes précédents (somme et produit) : toutes les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$. Et en particulier la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x, $f'(x) =$ … … … … …

③ La fonction valeur absolue $f : x \longmapsto |x|$ peut être définie de la façon suivante : $\begin{cases} f(x) = x & si\ x \geq 0 \\ f(x) = -x & si\ x < 0 \end{cases}$



Ainsi, on peut dire que la fonction $f : x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty\ [$et, pour tout réel x de cet intervalle $f'(x) = 1$ et f est dérivable sur $]-\infty\ ; 0[$; et, pour tout réel x de cet intervalle $f'(x) = -1$.

En revanche, la fonction valeur absolue f n'est pas dérivable en 0.

Exemple

Soit la fonction $f : x \longmapsto 5x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

3. Dérivée d'un quotient de fonctions

Théorème - Dérivée de l'inverse d'une fonction

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle I et si, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors la fonction $\frac{1}{v} : x \longmapsto$ … … .. est dérivable sur I.

On a, pour tout réel x de I, $\left(\frac{1}{v}\right)'(x) =$ … … … … …

On note $\left(\frac{1}{v}\right)' =$ … … … ….

Démonstration

…

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+7}$

Théorème - Dérivée d'un quotient

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors la fonction « quotient » $\frac{u}{v} : x \longmapsto$ … … … …. est dérivable sur I.

Et on a, pour tout réel x de I, $\left(\frac{u}{v}\right)'(x) =$ … … … … … … … … … … … ..

On note $\left(\frac{u}{v}\right)' =$ … … … … … ….

Exemple

Soit f la fonction définie sur $I =]-4\,;\,+\infty[$ par $x \longmapsto \frac{-7x+5}{x+4}$.

Remarque

Certaines fonctions sont de la forme $\frac{u}{v}$ mais il est souvent préférable de les écrire sous une autre forme plus simple à dériver.

Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$par $f : x \longmapsto \frac{2}{x}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2$ et $v(x) = x$, mais comme on peut écrire $f(x) = 2 \times \frac{1}{x}$, il est plus facile de la dériver avec la formule ku avec $k = 2$ et $u(x) = \frac{1}{x}$; on obtient donc $f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$.

Exercice résolu 4 page 126

4. Composition de fonctions et dérivation

Définition - Composition de fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $g(x)$ appartient à J.
La fonction composée de g suivie de f est la fonction h définie sur I par $h(x) =$ … … … ..

$$x \overset{g}{\longmapsto} g(x) = X \overset{f}{\longmapsto} f(X)$$
$$x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . f\big(g(x)\big)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $J = [0\,;\, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $I = \left[\frac{5}{2};\, +\infty\right[$ par $g(x) = 2x - 5$.
Alors la fonction h, composée de f suivie de g, est définie sur I car ….

Théorème - Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et g une fonction affine définie sur un intervalle I par $g(x) = ax + b$ où a et b sont des réels tels que, pour tout réel x de lintervalle I, $g(x)$ appartient à l'intervalle J.
Alors la fonction h composée de g suivie de f est dérivable sur I, et on a pour tout réel x de I, $h'(x) =$ … … … … … …

Exemple

Étudions la dérivabilité de la fonction h de l'exemple précédent.
h est définie sur $\left[\frac{5}{2};\, +\infty\right[$ par $h(x) = \sqrt{2x - 5}$.

Exercice résolu n°5 p.127