Variations et courbes représentatives

I. Variations d'une fonction

Propriété - Variations d'une fonction et signe de sa dérivée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Si la fonction f …………………………………… sur I alors, pour tout réel x de I, … … … … … … …
Si la fonction f …………………………………… sur I alors, pour tout réel x de I, … … … … … … ..
Si la fonction f est ……………………….. sur I alors, pour tout réel x de I, … … … … … … … …

Démonstration

Soit a un nombre réel quelconque appartenant à I.

<u>Cas d'une fonction f croissante sur I.</u>

…………..

Propriété - Signe de la dérivée et variation d'une fonction

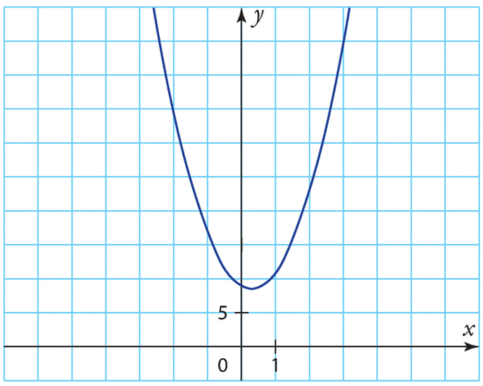
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
Si, pour tout réel x de I, $f'(x) > 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs où $f'(x)$ s'annule) alors la fonction f est ……………………………………………….. sur I.
Si, pour tout réel x de I, $f'(x) < 0$ (sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs où $f'(x)$ s'annule) alors la fonction f est ……………………………………………….. sur I.
Si, pour tout réel x de I, $f'(x) = 0$, alors la fonction f est …………………… sur I.

Remarque

La fonction f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si, pour tout réel x de I, $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^2 - 3x + 9$.



Exercice résolu 1 page 150

II. Nombre dérivé et extremums locaux

Définition - Minimum local et maximum local

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f admet un ……………………… en x_0 s'il existe un intervalle …………… J inclus dans I, contenant x et tel que, pour tout x de J, … … … … … … … … … … … … ….
On dit que f admet un ……………………… en x_0 s'il existe un intervalle ………….. J inclus dans I, contenant x et tel que, pour tout x de J, … … … … … … … … … … … … …
Un minimum ou maximum local est appelé …………………………..

Exemple

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-8\,;\,7]$ dont voici le tableau de variations :

x	-8		-1		4		7
Variations de f	10	↘	-2	↗	6	↘	-5

D'après le tableau de variations $f(x) \geq f(-1)$ pour tout x appartenant à l'intervalle $]-8\,;\,4[$, donc la fonction f admet un minimum local en -1 qui vaut -2.
Ce n'est pas le minimum de la fonction car $f(7) = -5$.

Définition - Dérivée et extremum local

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I. Et soit un réel appartenant à I.
Si f admet un extremum local en x_0 alors … … … … … … … … … … ….

Exemple

Soit f la fonction définie sur ℝ par $f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$.

Propriété - Caractérisation d'un extremum

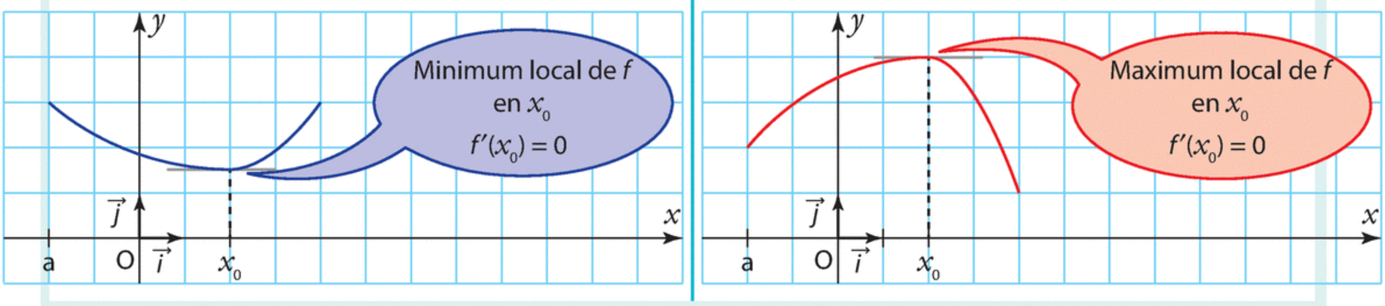
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert $I =]a\,;b[$. Et soit x_0 un réel appartenant à I.
Si … … … … … … … … et si f' ………………………… (on dit que f' …………………………………
……………………….en x_0) alors f admet un extremum local en x_0.

f admet un **minimum local** en x_0

x	a		x_0		b
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f		↘		↗	

f admet un **maximum local** en x_0

x	a		x_0		b
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f		↗		↘	



Exemples

① Soit f la fonction définie sur ℝ par : $f : x \longmapsto x^3 - 2x^2 - 4x + 1$

② La fonction cube $f : x \longmapsto x^3$ a pour dérivée $f' : x \longmapsto 3x^2$.

Exercice résolu 2 page 151