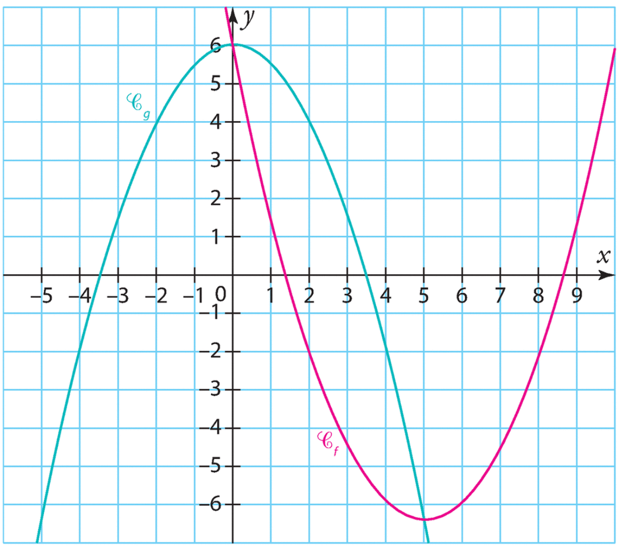
Variations et courbes
Fiche d'exercices (Sésamath page 152)

• Positions relatives de courbes

24 Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ dont les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ st représentées ci-contre dans un repère du plan.
1. Étudier la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.
2. En déduire les solutions des équations et inéquations suivantes.
a) $f(x) = g(x)$ **b)** $f(x) > g(x)$ **c)** $f(x) < g(x)$



Pour les exercices 26 à 28 le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j})$. $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans ce repère.

26 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 3x + 7$ et $g(x) = 5x - 9$.
1. Montrer, que pour tout réel x, $f(x) - g(x) = x^2 - 8x + 16$.
2. Étudier, selon les valeurs de x, le signe de $f(x) - g(x)$.
3. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

28 Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3x^2 + 7$ et $g(x) = x^2 - 1$.
1. Calculer, pour tout réel x, $f(x) - g(x)$.
2. Étudier, selon les valeurs de x, le signe de $f(x) - g(x)$.
3. En déduire la position relative des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

• Signe de la dérivée et variations

30 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 4$.
1. Justifier que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée f'.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. En utilisant vos connaissances sur les polynômes du second degré, vérifier les résultats trouvés à la question **3.**

31 Même exercice que le précédent avec la fonction $f : x \mapsto -2x^2 + 7x - 1$.

34 Soit g la fonction définies sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 - x$.
1. Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée g'.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
4. Vérifier la réponse à la question précédente en traçant la courbe de la fonction g sur la calculatrice graphique.

36 Même exercice que le précédent avec la fonction $g : x \mapsto -2x^3 + x^2 + 8x - 7$.

37 Soit g la fonction définie sur $]-\infty\,;9[\, \cup \,]9\,;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{3x+1}{x-9}$.
1. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]-\infty\,;9[\, \cup \,]9\,;+\infty[$ et déterminer sa dérivée g'.
2. Étudier le signe de $g'(x)$ sur $]-\infty\,;9[\, \cup \,]9\,;+\infty[$.
3. En déduire les variations de g sur $]-\infty\,;9[\, \cup \,]9\,;+\infty[$.
4. Contrôler votre réponse à la question précédente en traçant la courbe de la fonction g à l'aide la calculatrice graphique.

39 Même exercice que le précédent avec la fonction g définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{1}{4}\right\}$ par $g(x) = \dfrac{7}{3} - \dfrac{100}{1-4x}$.

• Extremum et optimisation

41 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' sa dérivée. On donne le tableau de signes de f'.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	

La fonction f admet-elle un extremum local ? Si oui, est-ce un maximum ou un minimum ?

43 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et f' sa dérivée.

x	$-\infty$		-2		-1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	–	0	+	

On donne le tableau de signes de f'.
1. La fonction f admet-elle un minimum local ? Si oui, en quelle valeur ?
2. La fonction f admet-elle un maximum local ? Si oui, en quelle valeur ?

45 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{4}x^2 - 15x + 100$
1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
2. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire que f admet un extremum local en une valeur que l'on déterminera.