Nombres premiers – Exercices Sésamath

Généralité sur les nombres premiers

13 ► MÉTHODE 1 p. 55

Sans calculatrice, à l'aide de divisions successives et du critère d'arrêt, déterminer si les entiers suivants sont premiers ou non.

$$97\ ;\ 117\ ;\ 271\ ;\ 323\ ;\ 401\ ;\ 527\ ;\ 719$$

14 Montrer que 271 est premier. On expliquera clairement la méthode utilisée.

16 p est premier et $p \geqslant 5$.

1) Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 3.
2) Démontrer que $p^2 - 1$ est divisible par 8.
3) En déduire que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

17 Soit p soit un nombre premier tel que $p > 3$.

1) Quels sont les restes possibles dans la division de p par 12 ?
2) Prouver que $p^2 + 11$ est divisible par 12.

23 Est-il possible de trouver un nombre premier p tel que $p + 1\,000$ et $p + 2\,000$ soient aussi premiers ?

Aide : On pourra raisonner modulo 3, c'est-à-dire que l'on analysera successivement les cas $p \equiv 0$, $p \equiv 1$ et $p \equiv 2$ modulo 3.

24 **Nombres de Mersenne**

On appelle nombres de Mersenne, les nombres M_n de la forme : $M_n = 2^n - 1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer les six premiers nombres de Mersenne. Quels sont ceux qui sont des nombres premiers ?
2) Soit n un entier naturel non nul et a un entier. Montrer la factorisation standard :
$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$.
3) En déduire que, si d est un diviseur de n, M_n est divisible par $2^d - 1$.
4) Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ? (On pourra calculer M_{11}.)
5) Soit a et n deux entiers tels que : $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

Décomposition. Nombre de diviseurs

25 ► MÉTHODE 2 p. 58

Décomposer 960 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 960 ?

26 Décomposer en produit de facteurs premiers 221 122. Quel est le nombre de diviseurs de 221 122 ?

27 ► MÉTHODE 3 p. 59

1) Déterminer le PGCD de 2 650 et 1 272 :
   a) à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;
   b) à l'aide de la décomposition en produit de facteurs premiers de 2 650 et 1 272.
2) Quelle est la méthode la plus efficace ? Pourquoi ?

29

1) Déterminer le PGCD de 428 904 et 306 360 :
   a) à l'aide de l'algorithme d'Euclide ;
   b) à l'aide de la décomposition en facteurs premiers de 428 904 et 306 360.
2) Quelle est la méthode la plus efficace ? Pourquoi ?

30 ► MÉTHODE 4 p. 60

Décomposer 792 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseurs de 792 ? À l'aide d'un tableau ou d'un arbre déterminer tous les diviseurs de 792.

31 Décomposer 8 316 en produit de facteurs premiers. Quel est le nombre de diviseur de 8 316 ?
À l'aide d'un tableau ou d'un arbre déterminer tous les diviseurs de 8 316.

32 Trouver un nombre de trois chiffres qui soit un carré parfait divisible par 56.

34 Trouver tous les diviseurs de 84, puis résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation : $x(x+1)(2x+1) = 84$.

35 Le produit de deux entiers naturels a et b ($a < b$) est 11 340. On note d leur PGCD.

1) a) Pourquoi d^2 divise-t-il 11 340 ?
   b) Pourquoi $d = 2^\alpha \times 3^\beta$, avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ et $0 \leqslant \beta \leqslant 2$?
2) On sait de plus que a et b ont six diviseurs communs et a est un multiple de 5.
   a) Démontrer que $d = 18$.
   b) En déduire a et b.

36 ► MÉTHODE 5 p. 61

α et β sont deux entiers naturels et $n = 2^\alpha 3^\beta$.
Le nombre de diviseurs de n^2 est le triple du nombre de diviseurs de n.

1) Prouver que $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 3$.
2) En déduire n.

39 Un détaillant de matériel audiovisuel effectue trois remises successives sur un article qui coûtait 300 € et qu'il vend 222,87 €.
Quels sont les pourcentages (nombres entiers) des trois remises ?

40 Les zéros de 1 000 !

L'exercice a pour but de déterminer par combien de zéros se termine le nombre 1 000 ! (factorielle mille et non « mille points d'exclamation »)

On rappelle que : $1\,000! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 1\,000$.

1) Montrer qu'il existe des entiers p et q ($p \geqslant 1$ et $q \geqslant 1$) et un entier N premier avec 10 tels que :

$$1\,000! = 2^p \times 5^q \times N.$$

2) On justifiera clairement les questions suivantes :
   a) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1 000 divisibles par 5 ?
   b) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1 000 divisibles par 5^2 ?
   c) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1 000 divisibles par 5^3 ?
   d) Combien y a-t-il de nombres inférieurs ou égaux à 1 000 divisibles par 5^4 ?
   e) En déduire alors que $q = 249$.
3) Établir que $p > q$ et que le nombre cherché est q.

41 Triplets pythagoriciens

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x; y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\text{(E)} \quad x^2 + y^2 = p^2.$$

1) On pose $p = 2$. Montrer que l'équation (E) est sans solution.
2) On suppose désormais que $p \neq 2$ et que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E). Le but des questions suivantes est de prouver que x et y sont premiers entre eux.
   a) Montrer que x et y sont de parités différentes.
   b) Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.
   c) En déduire que x et y sont premiers entre eux.
3) On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire que :
   $p = u^2 + v^2$,
   où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.
   a) Vérifier que le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right| \; ; \; 2uv\right)$ est solution de (E).
   b) Donner une solution de l'équation (E) lorsque : $p = 5$, puis lorsque $p = 13$.
4) On se propose enfin de vérifier, sur deux exemples, que l'équation (E) est impossible lorsque p n'est pas la somme de deux carrés.
   a) $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils la somme de deux carrés ?
   b) Démontrer que les équations :
   $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de couples solutions d'entiers strictement positifs.

42 Théorème d'Euclide

On appelle nombre parfait un nombre dont la somme des diviseurs stricts est égal à lui-même.

1) Euclide donne la règle suivante pour trouver des nombres parfaits :
   « Si un nombre a s'écrit $2^n(2^{n+1} - 1)$ et si $2^{n+1} - 1$ est premier, alors a est parfait ».
   Exemples : Trouver les quatre premiers nombres parfaits.
2) **Démonstration**. On pose $a = 2^n(2^{n+1} - 1)$ et supposons que $2^{n+1} - 1$ est premier.
   a) Quelle est la décomposition de a en produit de facteurs premiers ?
   b) En déduire la liste des diviseurs de a.
   c) Démontrer alors que la somme des diviseurs stricts est égale à ce nombre a.