**Vecteurs de l’espace**

1. **Vecteurs de l’espace**

On étend à l’espace la définition et les propriétés des vecteurs étudiées dans le plan.

PROPRIÉTÉS : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls et sont colinéaires si et seulement s’il existe un réel tel que .

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l’espace.

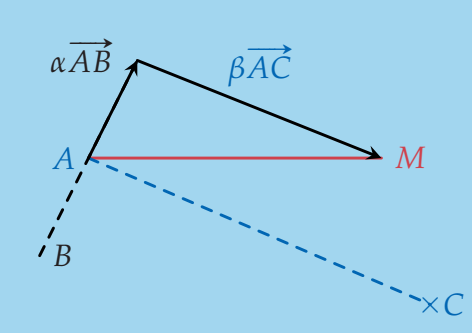
PROPRIÉTÉ : Caractéristique

et étant deux points distincts de l’espace, la droite est l’ensemble des points de l’espace tels que et soient colinéaires.

On dit que est un vecteur directeur de la droite .

DÉFINITION : Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs non nuls , et sont coplanaires si et seulement leurs représentants de même origine ont des extrémités et telles que et appartiennent à un même plan.

PROPRIÉTÉ : Caractéristique

, et étant trois points non alignés de l’espace, le plan est l’ensemble des points de l’espace tels que :

, avec et deux nombres réels.

On dit que et dirigent le plan .

PREUVE

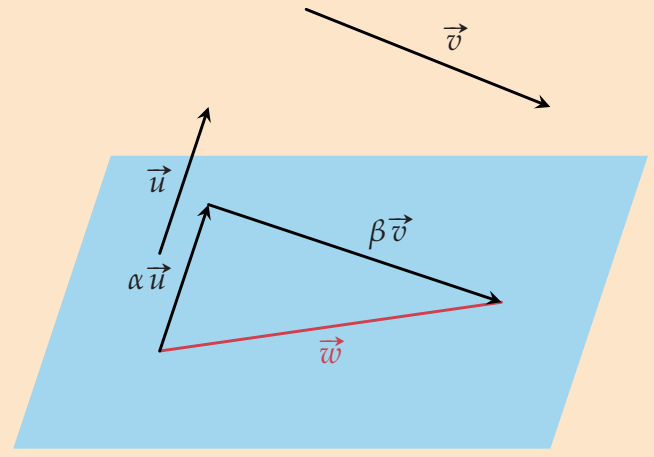
, et ne sont pas alignés. Les vecteurs et n’étant pas colinéaires, est donc un repère du plan .

• Si appartient à , alors , , et étant coplanaires, il existe et deux nombres réels tels que .

• Réciproquement, si est un point de l’espace tel que

, avec et deux nombres réels, alors il existe un point de la droite tel que .

. est donc un point de la droite parallèle à passant par . Donc, comme , .

PROPRIÉTÉ

Soit trois vecteurs non nuls , et tels que et ne sont pas colinéaires.

, et sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels et tels que .

PREUVE

Soit , , et les points de l’espace tels que , et .

, et sont coplanaires si et seulement si , , et sont coplanaires, c’est-à -dire si et seulement si il existe deux réels et tels que .

**MÉTHODE 3 Démontrer que quatre points sont coplanaires (exo 41 page 287)**

Il s’agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l’un en fonction des deux autres.

Exercice d’application

Soit un tétraèdre, le milieu de ; et les points définis par et et G le point tel que soit un parallélogramme.

1. Exprimer les vecteurs , et en fonction de , et .

2. En déduire qu’il existe deux réels et tels que .

3. En déduire que les points et sont coplanaires.

Correction

1.

2. Il existe deux réels et tels que soit :

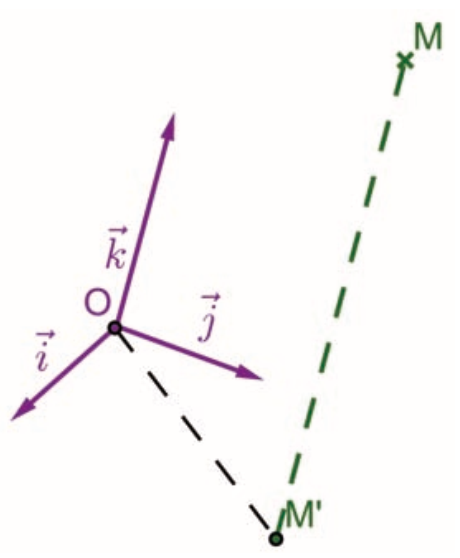
Pour obtenir cette égalité, il suffit de prendre et tels que :

et et , soit, et .

D’où

3. On en déduit que les vecteurs , et sont coplanaires, donc les points et sont coplanaires.

**5** **- Repérage dans l’espace**



THÉORÈME

Si est un point de l’espace et , et trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point de l’espace, il existe un unique triplet de réels tels que :

Preuve

• Existence

Soit le plan passant par et dirigé par les vecteurs et (qui ne sont pas colinéaires car , et sont non coplanaires).

Soit le point d’intersection de et de la droite parallèle à passant par .

, et sont coplanaires avec et non colinéaires, donc il existe deux réels et tels que . D’autre part, et sont colinéaires, donc il existe un réel tel que .

D’où

• Unicité

Supposons qu’il existe deux triplets de réels et tels que

.

On a alors .

Comme , et ne sont pas coplanaires, il n’existe pas de couple de réels tels que , on en déduit que , et par suite, que , et .

DÉFINITION

est le triplet de coordonnées du point dans le repère .

est l’abscisse de , est l’ordonnée de et est la cote de .

sont aussi les coordonnées du vecteur dans le repère .

PROPRIÉTÉ

Dans un repère de l’espace, soit et . Alors :

et le milieu de a pour coordonnées : .

Si de plus est orthonormé, .

PROPRIÉTÉ

Dans un repère de l’espace, soit , deux vecteurs et un nombre réel. Alors :

et .

Si de plus est orthonormé, .

**MÉTHODE 4 La coplanarité de points en utilisant leurs coordonnées**

Il s’agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l’un des vecteurs en fonction des deux autres.

Exercice d’application

Dans un repère de l’espace.

Démontrer que les points , , et sont coplanaires.

Correction

; et .

et ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

.

Le système ayant un unique couple solution, les vecteurs , et sont coplanaires, donc les points , , et sont coplanaires.

**6** **Représentation paramétrique de droites et de plans**

Dans un repère de l’espace, on considère la droite passant par et de vecteur directeur .

si et seulement si il existe un réel tel que :

Preuve

si et seulement si et sont colinéaires, c’est-à -dire qu’il existe un réel tel que . Cela se traduit en terme de coordonnées par :

DÉFINITION

On dit que le système d’équations :

où est une représentation paramétrique de la droite passant par et de vecteur directeur .

REMARQUE : Un exemple de cette définition est proposé dans l’exercice 50.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère de l’espace, le plan passant par et de vecteurs directeurs et .

si et seulement si il existe deux réels et tels que :

Preuve

si et seulement si , et sont coplanaires, c’est-à -dire qu’il existe deux réels et tels que . Cela se traduit en terme de coordonnées par :

.

On dit que le système d’équations :

où et est une représentation paramétrique du plan passant par et de vecteurs directeurs et .

REMARQUE : Un exemple de cette définition est proposé dans l’exercice ex 55.

REMARQUE : Il existe une infinité de représentations paramétriques, que ce soit pour une droite ou pour un plan.

**MÉTHODE 5 Étudier des positions relatives (exo 58 page 288)**

Exercice d’application

Étudier les positions relatives des droites et puis du plan et de la droite . On donnera leur intersection éventuelle.

Le plan a pour représentation paramétrique : avec et

Les droites et ont pour représentation paramétrique :

: avec et : avec

Correction

Attention : la même lettre désigne deux paramètres différents. Il faut donc changer de lettre dans les résolutions de système pour les différencier.

est dirigé par les vecteurs et .

et ont pour vecteur directeur respectif et .

On remarque que donc est parallèle à .

Le point appartient à . S’il appartient à alors , sinon est strictement parallèle à .

Or,

Le système n’ayant pas de solution, donc est strictement parallèle à .

Déterminons maintenant : il existe trois réels , et tels que :

En finissant la résolution du système, on obtient ; et , ce qui nous donne ; et .

Ainsi, et sont sécantes au point