**Vecteurs de l’espace**

1. **Vecteurs de l’espace**

 On étend à l’espace la définition et les propriétés des vecteurs étudiées dans le plan.

PROPRIÉTÉS : Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement s’il existe un réel $k$ tel que $\vec{v}=k\vec{u}$.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l’espace.

PROPRIÉTÉ : Caractéristique

$A$ et $B$ étant deux points distincts de l’espace, la droite $\left(AB\right)$ est l’ensemble des points $M$ de l’espace tels que $\vec{AB} $ et $\vec{AM}$ soient colinéaires.

On dit que $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de la droite $\left(AB\right)$.

DÉFINITION : Vecteurs coplanaires

Trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement leurs représentants de même origine $A$ ont des extrémités $B,C$ et $D$ telles que $A,B,C$ et $D$ appartiennent à un même plan.

PROPRIÉTÉ : Caractéristique

$A$, $B$ et $C$ étant trois points non alignés de l’espace, le plan $\left(ABC\right)$ est l’ensemble des points $M$ de l’espace tels que :

$\vec{AM}=α\vec{AB}+β\vec{AC}$, avec $α$ et $β$ deux nombres réels.

On dit que $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ dirigent le plan $\left(ABC\right)$.

PREUVE

$A$, $B$ et $C$ ne sont pas alignés. Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ n’étant pas colinéaires, $\left(A ;\vec{AB},\vec{AC}\right)$ est donc un repère du plan $\left(ABC\right)$.

 • Si $M$ appartient à $\left(ABC\right)$, alors $M$, $A$, $B$ et $C$ étant coplanaires, il existe $α$ et $β$ deux nombres réels tels que $\vec{AM}=α\vec{AB}+β\vec{AC}$.

 • Réciproquement, si $M$ est un point de l’espace tel que

$\vec{AM}=α\vec{AB}+β\vec{AC}$, avec $α$ et $β$ deux nombres réels, alors il existe un point $N$ de la droite $\left(AB\right)$ tel que $\vec{AN}=α\vec{AB}$.

$\vec{AM}=α\vec{AB}+β\vec{AC}⇔\vec{NM}=β\vec{AC}$. $M$ est donc un point de la droite parallèle à $\left(AC\right)$ passant par $N$. Donc, comme $N\in \left(ABC\right)$, $M\in \left(ABC\right)$.

PROPRIÉTÉ

Soit trois vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels $α$ et $β$ tels que $\vec{w}=α\vec{u}+β\vec{v}$.

PREUVE

Soit $A$, $B$, $C$ et $M$ les points de l’espace tels que $\vec{w}=\vec{AM}$, $\vec{u}=\vec{AB}$ et $\vec{w}=\vec{AC}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $A$, $B$, $C$ et $M$ sont coplanaires, c’est-à -dire si et seulement si il existe deux réels $α$ et $β$ tels que $\vec{AM}=α\vec{AB}+β\vec{AC}⇔\vec{w}=α\vec{u}+β\vec{v}$.

**MÉTHODE 3 Démontrer que quatre points sont coplanaires (exo 41 page 287)**

Il s’agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l’un en fonction des deux autres.

Exercice d’application

Soit $ABCD$ un tétraèdre, $I$ le milieu de $\left[AB\right]$ ; $E$ et $F$ les points définis par $\vec{AE}=\frac{2}{3}\vec{AC}$ et $\vec{AF}=\frac{2}{3}\vec{AD}$ et G le point tel que $BCGD$ soit un parallélogramme.

 1. Exprimer les vecteurs $\vec{IE}$, $\vec{IF}$ et $\vec{IG}$ en fonction de $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$.

 2. En déduire qu’il existe deux réels $α$ et $β$ tels que $\vec{IG}=α\vec{IE}+β\vec{IF}$.

 3. En déduire que les points $I,E,G$ et $F$ sont coplanaires.

 Correction

 1. $\begin{matrix}\vec{IE}&=\vec{IA}+\vec{AE}=-\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{2}{3}\vec{AC}\\\vec{IF}&=\vec{IA}+\vec{AF}=-\frac{1}{2}\vec{AB}+\frac{2}{3}\vec{AD}\\\vec{IG}&=\vec{IA}+\vec{AD}+\vec{DG}\\&=-\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{BC}\\&=-\frac{1}{2}\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{BA}+\vec{AC}\\&=-\frac{3}{2}\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AC} \end{matrix}$

 2. Il existe deux réels $α$ et $β$ tels que $\vec{IG}=α\vec{IE}+β\vec{IF}$ soit :

$$-\frac{3}{2}\vec{AB}+\vec{AD}+\vec{AC}=-\frac{α}{2}\vec{AB}+\frac{2α}{3}\vec{AC}-\frac{β}{2}\vec{AB}+\frac{2β}{3}\vec{AD}$$

Pour obtenir cette égalité, il suffit de prendre $α$ et $β$ tels que :

 $-\frac{3}{2}=-\frac{α}{2}-\frac{β}{2}$ et $\frac{2}{3}α=1$ et $\frac{2}{3}β=1$ , soit, $α=\frac{3}{2}$ et $β=\frac{3}{2}$.

 D’où $\vec{IG}=\frac{3}{2}\vec{IE}+\frac{3}{2}\vec{IF}$

 3. On en déduit que les vecteurs $\vec{IE}$, $\vec{IF}$ et $\vec{IG}$ sont coplanaires, donc les points $I,E,G$ et $F$ sont coplanaires.

**5** **- Repérage dans l’espace**



THÉORÈME

Si $O$ est un point de l’espace et $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs non coplanaires, alors pour tout point $M$ de l’espace, il existe un unique triplet de réels $\left(x ;y ;z\right)$ tels que :

$$\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}.$$

Preuve

 • Existence

Soit $℘$ le plan passant par $O$ et dirigé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (qui ne sont pas colinéaires car $\vec{i}$ , $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont non coplanaires).

Soit $M^{'}$ le point d’intersection de $℘$ et de la droite parallèle à $\left(O\vec{k}\right)$ passant par $M$.

 $\vec{i}$ , $\vec{j}$ et $\vec{OM^{'}}$ sont coplanaires avec $\vec{i}$ et $\vec{j}$ non colinéaires, donc il existe deux réels $x$ et $y$ tels que $\vec{OM^{'}} =x\vec{i}+y\vec{j}$. D’autre part, $\vec{M'M}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, donc il existe un réel $z$ tel que $\vec{M'M}=z\vec{k}$.

D’où $\vec{OM}=\vec{OM^{'}}+\vec{M^{'}M}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

 • Unicité

Supposons qu’il existe deux triplets de réels $\left(x ;y ;z\right)$ et $\left(x^{'} ;y^{'} ;z^{'}\right)$ tels que

$\vec{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=x^{'}\vec{i}+y^{'}\vec{j}+z^{'}\vec{k}$.

On a alors $\left(z^{'}-z\right)\vec{k}=\left(x-x^{'}\right)\vec{i}+\left(y-y^{'}\right)\vec{j}$.

Comme $\vec{i}$ , $\vec{j}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires, il n’existe pas de couple de réels $\left(α ;β\right)$ tels que $\vec{k}=α\vec{i}+β\vec{j}$, on en déduit que $z-z^{'}=0$, et par suite, que $x=x^{'}$, $y=y^{'}$ et $z=z^{'}$.

DÉFINITION

$\left(x ;y ;z\right)$ est le triplet de coordonnées du point $M$ dans le repère $\left(O ;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

$x$ est l’abscisse de $M$, $y$ est l’ordonnée de $M$ et $z$ est la cote de $M$.

$\left(x;y;z\right)$ sont aussi les coordonnées du vecteur $\vec{OM}$ dans le repère $\left(O ;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère $\left(O ;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l’espace, soit $A\left(x\_{A };y\_{A };z\_{A}\right)$ et $B\left(x\_{B };y\_{B };z\_{B}\right)$. Alors :

$$\vec{AB}\left(\begin{matrix}x\_{B}-x\_{A}\\y\_{B}-y\_{A}\\z\_{B}-z\_{A}\end{matrix}\right)$$

et le milieu $K$ de $\left[AB\right]$ a pour coordonnées : $K$ $\left(\frac{x\_{A}+x\_{B}}{2 };\frac{y\_{A}+y\_{B}}{2 };\frac{z\_{A}+z\_{B}}{2}\right)$.

Si de plus $\left(O ; \vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est orthonormé, $AB=\sqrt{\left(x\_{B}-x\_{A}\right)^{2}+\left(y\_{B}-y\_{A}\right)^{2}+\left(z\_{B}-z\_{A}\right)^{2}}$.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère$\left(O ; \vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l’espace, soit $\vec{u}\left(\begin{matrix}x\\y\\z\end{matrix}\right)$, $\vec{v}\left(\begin{matrix}x^{'}\\y^{'}\\z^{'}\end{matrix}\right)$ deux vecteurs et $k$ un nombre réel. Alors :

$\vec{u}+\vec{v}\left(\begin{matrix}x+x^{'}\\y+y^{'}\\z+z^{'}\end{matrix}\right)$ et $k\vec{u}\left(\begin{matrix}kx\\ky\\kz\end{matrix}\right)$.

Si de plus $\left(O ;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est orthonormé, $\left|\left|\vec{u}\right|\right|=\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}$.

**MÉTHODE 4 La coplanarité de points en utilisant leurs coordonnées**

Il s’agit de démontrer que trois vecteurs sont coplanaires en écrivant l’un des vecteurs en fonction des deux autres.

Exercice d’application

Dans un repère $\left(O ;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l’espace.

Démontrer que les points $A\left(1 ;2 ;0\right)$, $B\left(-1 ;1 ;1\right)$, $C\left(1 ;4 ;1\right)$ et $D\left(3 ;-1 ;-3\right)$ sont coplanaires.

Correction

$\vec{AB}\left(\begin{matrix}-2\\-1\\-1\end{matrix}\right)$ ; $\vec{AC}\left(\begin{matrix}0\\2\\1\end{matrix}\right)$ et $\vec{AD}\left(\begin{matrix}-2\\-3\\-3\end{matrix}\right)$.

$\vec{AB}$ et $\vec{AC} $ne sont pas colinéaires, car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles.

$\vec{AD}=α\vec{AB}+β\vec{AC} ⇔ \left\{\begin{matrix}-2=-2α\\-3=-α+2β\\-3=α+β\end{matrix}\right. ⇔\left\{\begin{matrix}α=-1\\β=-2\end{matrix}\right.$.

Le système ayant un unique couple solution, les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ et $\vec{AD}$ sont coplanaires, donc les points $A$, $B$, $C$ et $D$ sont coplanaires.

**6** **Représentation paramétrique de droites et de plans**

Dans un repère $\left(O ;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l’espace, on considère la droite $D$ passant par $A\left(x\_{A} ;y\_{A} ;z\_{A}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{matrix}α\\β\\γ\end{matrix}\right)$.

$M\left(x;y;z\right)\in D$ si et seulement si il existe un réel $t$ tel que :

 $ \left\{\begin{matrix}x=x\_{A}+tα\\y=y\_{A}+tβ\\z=z\_{A}+tγ\end{matrix}\right.$

Preuve

$M\left(x ;y ;z\right)\in D$ si et seulement si $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c’est-à -dire qu’il existe un réel $t$ tel que $\vec{AM}=t\vec{u}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :$\left\{\begin{matrix}x-x\_{A}=tα\\y-y\_{A}=tβ\\z-z\_{A}=tγ\end{matrix}\right. ⇔ \left\{\begin{matrix}x=x\_{A}+tα\\y=y\_{A}+tβ\\z=z\_{A}+tγ\end{matrix}\right.$

DÉFINITION

On dit que le système d’équations :

$\left\{\begin{matrix}x=x\_{A}+tα\\y=y\_{A}+tβ\\z=z\_{A}+tγ\end{matrix}\right.$ où $t\in R$ est une représentation paramétrique de la droite $D$ passant par $A\left(x\_{A };y\_{A };z\_{A}\right)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\left(\begin{matrix}α\\β\\γ\end{matrix}\right)$.

REMARQUE : Un exemple de cette définition est proposé dans l’exercice 50.

PROPRIÉTÉ

Dans un repère $\left(O ;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ de l’espace, le plan $P$ passant par $A\left(x\_{A };y\_{A };z\_{A}\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\left(\begin{matrix}α\\β\\γ\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}α^{'}\\β^{'}\\γ^{'}\end{matrix}\right)$.

$M\left(x ;y ;z\right)\in P$ si et seulement si il existe deux réels $t$ et $t^{'}$ tels que : $\left\{\begin{matrix}x=x\_{A}+tα+t^{'}α^{'}\\y=y\_{A}+tβ+t^{'}β^{'}\\z=z\_{A}+tγ+t^{'}γ^{'}\end{matrix}\right.$

Preuve

$M\left(x ; y ; z\right)\in P$ si et seulement si $\vec{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires, c’est-à -dire qu’il existe deux réels $t$ et $t^{'}$ tels que $\vec{AM}=t\vec{u}+t^{'}\vec{v}$. Cela se traduit en terme de coordonnées par :

 $\left\{\begin{matrix}x-x\_{A}=tα+t^{'}α^{'}\\y-y\_{A}=tβ+t^{'}β^{'}\\z-z\_{A}=tγ+t^{'}γ^{'}\end{matrix}\right. ⇔ \left\{\begin{matrix}x=x\_{A}+tα+t^{'}α^{'}\\y=y\_{A}+tβ+t^{'}β^{'}\\z=z\_{A}+tγ+t^{'}γ^{'}\end{matrix}\right.$.

 On dit que le système d’équations :

$\left\{\begin{matrix}x=x\_{A}+tα+t^{'}α^{'}\\y=y\_{A}+tβ+t^{'}β^{'}\\z=z\_{A}+tγ+t^{'}γ^{'}\end{matrix}\right.$ où $t\in R$ et $t^{'}\in R$ est une représentation paramétrique du plan $P$ passant par $A\left(x\_{A };y\_{A };z\_{A}\right)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\left(\begin{matrix}α\\β\\γ\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}α^{'}\\β^{'}\\γ^{'}\end{matrix}\right)$.

REMARQUE : Un exemple de cette définition est proposé dans l’exercice ex 55.

REMARQUE : Il existe une infinité de représentations paramétriques, que ce soit pour une droite ou pour un plan.

**MÉTHODE 5 Étudier des positions relatives (exo 58 page 288)**

Exercice d’application

Étudier les positions relatives des droites $d$ et $d^{'}$ puis du plan $℘$ et de la droite $d^{'}$. On donnera leur intersection éventuelle.

Le plan $℘$ a pour représentation paramétrique :$\left\{\begin{matrix}x=1-2t+3t^{'}\\y=-2+t-t^{'}\\z=3-t\end{matrix}\right.$ avec $t\in R$ et $t^{'}\in R$

Les droites $d$ et $d^{'}$ ont pour représentation paramétrique :

$d$ : $\left\{\begin{matrix}x=2+4t\\y=5-2t\\z=1+2t\end{matrix}\right.$ avec $t\in R$ et $d^{'}$ : $\left\{\begin{matrix}x=4-t\\y=-2+t\\z=1+3t\end{matrix}\right.$ avec $t\in R$

Correction

Attention : la même lettre $t$ désigne deux paramètres différents. Il faut donc changer de lettre dans les résolutions de système pour les différencier.

$℘$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u}\left(\begin{matrix}-2\\1\\-1\end{matrix}\right)$ et $\vec{v}\left(\begin{matrix}3\\-1\\-1\end{matrix}\right)$.

$d$ et $d^{'}$ ont pour vecteur directeur respectif $\vec{w}\left(\begin{matrix}4\\-2\\2\end{matrix}\right)$ et $\vec{w^{'}}\left(\begin{matrix}-1\\1\\3\end{matrix}\right)$.

On remarque que $\vec{w}=-2\vec{u}$ donc $d$ est parallèle à $℘$.

Le point $A\left(2 ;5 ;1\right)$ appartient à $d$. S’il appartient à $℘$ alors $d⊂℘$, sinon $d$ est strictement parallèle à $℘$.

Or, $\left\{\begin{matrix}2=1-2t+3t^{'}\\5=-2+t-t^{'}\\1=3-t\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}-2t+3t^{'}=1\\t-t^{'}=7\\t=2\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}t^{'}=\frac{5}{3}\\t^{'}=-5\\t=2\end{matrix}\right.$

Le système n’ayant pas de solution, $A℘$ donc $d$ est strictement parallèle à $℘$.

Déterminons maintenant $℘∩d^{'}$ : $M\in ℘∩d^{'}⇔$ il existe trois réels $t$, $t^{'}$ et $k$ tels que :

$$\left\{\begin{matrix}x=1-2t+3t^{'}\\y=-2+t-t^{'}\\z=3-t\\x=4-k\\y=-2+k\\z=1+3k\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}4-k=1-2t+3t^{'}\\-2+k=-2+t-t^{'}\\1+3k=3-t\\x=4-k\\y=-2+k\\z=1+3k\end{matrix}\right.⇔\left\{\begin{matrix}-k+2t-3t^{'}=-3\\k-t+t^{'}=0\\3k+t=2\\x=4-k\\y=-2+k\\z=1+3k\end{matrix}\right.$$

En finissant la résolution du système, on obtient $t^{'}=\frac{14}{5}$ ; $t=\frac{52}{20}$ et $k=\frac{-1}{5}=-0,2$, ce qui nous donne $x=4,2$ ; $y=-2,2$ et $z=0,4$.

Ainsi, $℘$ et $d^{'}$ sont sécantes au point $K\left(4,2 ;-2,2 ;0,4\right)$