Exercices page 288 du livre Sésamath

Exercice 59

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -5 - 4t, \; t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

1. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 - 6t \;, \; t \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 3t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - t, \; t \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - 2t \;, \; t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

Exercice 61

Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \; t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R} \\ z = t - t' \end{cases}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\wp$ et du plan :

1. $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$
2. $(O\,; \vec{\imath}, \vec{k}\,)$
3. $(O\,; \vec{\jmath}, \vec{k}\,)$

Exercice 59

Soit Δ la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -5 - 4t, \; t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Dans chacun des cas suivants, étudier la position de la droite Δ avec la droite d de représentation paramétrique :

1. $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 7 - 6t \;, t \in \mathbb{R} \\ z = -3 + 3t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 4 - t, \; t \in \mathbb{R} \\ z = 2 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 7 - 2t \;, t \in \mathbb{R} \\ z = -2 + 3t \end{cases}$

La droite Δ est dirigée par $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et passe par $A(8;-5;3)$.

Corrigé

1. La droite d est dirigée par $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$ qui est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, donc $d//\Delta$. De plus, les coordonnées de A vérifient le système d'équations paramétriques de d (pour t=2), donc d et Δ sont confondues.

2. d et Δ non parallèles, on cherche donc si d et Δ sont sécantes ou non coplanaires : $M(x;y;z) \in d \cap \Delta \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et k tels que :

$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -5 - 4t \\ z = 3 + 2t \\ x = 1 - k \\ y = 4 - k \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - k = 8 + 2t \\ 4 - k = -5 - 4t \\ 2 = 3 + 2t \\ x = 1 - k \\ y = 4 - k \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{2} \\ k = -6 \\ 4 + 6 = -5 + 2!!! \\ x = 1 - k \\ y = 4 - k \\ z = 2 \end{cases}.$$

Le système n'a pas de solution, donc d et Δ sont non coplanaires.

3. d et Δ non parallèles, on cherche donc si d et Δ sont sécantes ou non coplanaires : $M(x;y;z) \in d \cap \Delta \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et k tels que :

$$\begin{cases} x = 8 + 2t \\ y = -5 - 4t \\ z = 3 + 2t \\ x = -1 + k \\ y = 7 - 2k \\ z = -2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + k = 8 + 2t \\ 7 - 2k = -5 - 4t \\ -2 + 3k = 3 + 2t \\ x = -1 + k \\ y = 7 - 2k \\ z = -2 + 3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ t = -\frac{11}{2} \\ 7 + 4 = -5 + 22!!! \\ x = 1 - k \\ y = 4 - k \\ z = 2 \end{cases}.$$

Le système n'a pas de solution, donc d et Δ sont non coplanaires.

Corrigé

Exercice 61

Soit $\wp$ le plan de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \quad t \in \mathbb{R}, t' \in \mathbb{R} \\ z = t - t' \end{cases}$$

Dans chacun des cas suivants, déterminer une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $\wp$ et du plan :

1. $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$
2. $(O\,;\vec{\imath},\vec{k})$
3. $(O\,;\vec{\jmath},\vec{k})$

1. Un point $M(x;y;z)$ appartient à $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ si et seulement si $z=0$. Ainsi :
$M(x;y;z) \in \wp \cap (O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}) \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \\ z = t - t' \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = t' \\ x = 4 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 0 \end{cases}.$$

Donc les plans $\wp$ et $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j})$ sont sécants selon la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = 1 + 4t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}.$

2. Un point $M(x;y;z)$ appartient à $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})$ si et seulement si $y=0$. Ainsi :
$M(x;y;z) \in \wp \cap (O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{k}) \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \\ z = t - t' \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 5t' \\ x = 3 - 2t' \\ y = 0 \\ z = 1 + 4t' \end{cases}.$$

Donc les plans $\wp$ et $(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{k})$ sont sécants selon la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 3 - 2t' \\ y = 0 \\ z = 1 + 4t' \end{cases} \quad t' \in \mathbf{R}.$

3. Un point $M(x;y;z)$ appartient à $(O;\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ si et seulement si $x=0$. Ainsi :
$M(x;y;z) \in \wp \cap (O;\overrightarrow{j},\overrightarrow{k}) \Leftrightarrow$ il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = 4 - t + 3t' \\ y = 1 - t + 5t' \\ z = t - t' \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 + 3t' \\ x = 0 \\ y = -3 + 2t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases}.$$

Donc les plans $\wp$ et $(O;\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$ sont sécants selon la droite de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 + 2t' \\ z = 4 + 2t' \end{cases} \quad t' \in \mathbf{R}.$