64 **D'après Bac (Asie – juin 2013 et Amérique du Sud - novembre 2012)**

Vrai faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse, et proposer une démonstration de la réponse indiquée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.

1) Dans les deux questions suivantes, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit S le point de coordonnées $(1\ ;\ 3\ ;\ 5)$ et Δ_1 la droite de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 5-4t \\ z = 2-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Affirmation 1 : VRAIE

Le point S appartient à Δ_2 (avec $t=-1$) et Δ_1 et Δ_2 sont parallèles puisque leurs vecteurs directeurs respectifs $\vec{u_1}(1\ ;\ -4\ ;\ -2)$ et $\vec{u_2}(-1\ ;4\ ;2)$ sont colinéaires.

Affirmation 1 : la droite Δ_2 de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 7+4t \\ z = 7+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

est la droite parallèle à la droite Δ_1 passant par le point S.

Affirmation 2 : VRAIE

Le point E appartient à Δ (avec $t=\frac{5}{2}$) et les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{JK}$ et $\vec{u}(-1\ ;\ -2\ ;1)$ sont non coplanaires, donc la droite Δ est sécante au plan (IJK).

On considère les points $I(1\ ;\ 0\ ;\ 0)$, $J(0\ ;\ 1\ ;\ 0)$ et $K(0\ ;0\ ;1)$.

Affirmation 2 : la droite Δ de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 2-t \\ y = 6-2t \\ z = -2+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

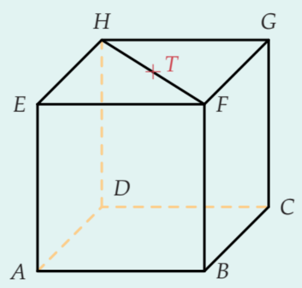
coupe le plan (IJK) au point $E\left(-\frac{1}{2}\ ;\ 1\ ;\ \frac{1}{2}\right)$.

Affirmation 3 : VRAIE

Soit a la longueur d'une arête de ce cube,

$$\overrightarrow{AT}\cdot\overrightarrow{EC} = \left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ET}\right)\cdot\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}\right)$$
$$= -a^2+0+0+\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\times a\right)^2 = 0$$

Dans le cube ABCDEFGH, le point T est le milieu du segment [HF].

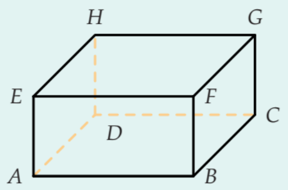


Affirmation 3 : les droites (AT) et (EC) sont orthogonales

65 **D'après Bac (Polynésie – juin 2015)**

On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ ci-dessous, pour lequel $AB = 6$, $AD = 4$ et $AE = 2$.

I, J et K sont les points tels que :
$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.



On se place dans le repère orthonormé $(A; \vec{AI}, \vec{AJ}, \vec{AK})$.

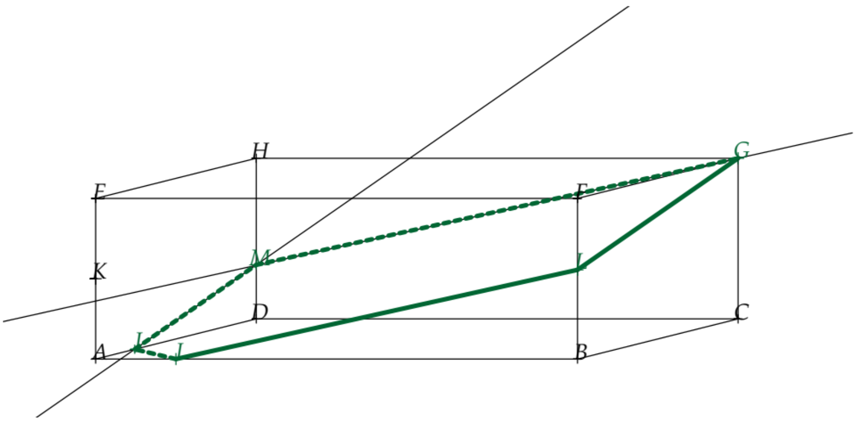
1) Déterminer une représentation paramétrique du plan (IJG).

2) Déterminer les coordonnées du point d'intersection L du plan (IJG) et de la droite (BF).

3) Reproduire la figure et tracer la section du pavé $ABCDEFGH$ par le plan (IJG). On ne demande pas de justification.

1. Une représentation paramétrique de (IJG) est :
$$\begin{cases} x = 1 - t + 5t' \\ y = t + 4t' \qquad t \in \mathbf{R}; t' \in \mathbf{R}. \\ z = 2t' \end{cases}$$

2. Une représentation paramétrique de (BF) est :
$\begin{cases} x = 6 \\ y = 0 \\ z = 2k \end{cases}$ $, k \in \mathbf{R}$. Comme $L \in (IJG) \cap (BF)$, ses coordonnées vérifient les deux systèmes, et en résolvant on obtient $L(6; 0; \frac{10}{9})$.



66 **D'après Bac (Métropole – juin 2015)**

Dans un repère orthonormé $(O,\ I,\ J,\ K)$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(0\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $B(2\ ;\ -1\ ;\ 5)$, $C(11\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $D(11\ ;\ 4\ ;\ 4)$.

Un point M se déplace sur la droite (AB) dans le sens de A vers B à la vitesse de 1 cm par seconde.

Un point N se déplace sur la droite (CD) dans le sens de C vers D à la vitesse de 1 cm par seconde.

À l'instant $t = 0$ le point M est en A et le point N est en C.

On note M_t et N_t les positions des points M et N au bout de t secondes, t désignant un nombre réel positif.

On admet que M_t et N_t, ont pour coordonnées :
$M_t(t\ ;\ -1\ ;\ 5)$ et $N_t(11\ ;\ 0{,}8t\ ;\ 1 + 0{,}6t)$.

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) a) La droite (AB) est parallèle à l'un des axes (OI), (OJ) ou (OK). Lequel ?

b) La droite (CD) se trouve dans un plan $\mathcal{P}$ parallèle à l'un des plans (OIJ), (OIK) ou (OJK).
Lequel ? On donnera une représentation paramétrique de ce plan $\mathcal{P}$.

c) Vérifier que la droite (AB), coupe le plan $\mathcal{P}$ au point $E(11\ ;\ -1\ ;\ 5)$.

d) Les droites (AB) et (CD) sont-elles sécantes ?

2) a) Montrer que $M_tN_t^2 = 2t^2 - 25{,}2t + 138$.

b) À quel instant t la longueur M_tN_t est-elle minimale ?

1. (a) A et B ont pour ordonnée commune -1 et pour côte commune 5, ils appartiennent donc à une droite parallèle à la droite (OI).

   (b) C et D ont pour abscisse commune 11, ils appartiennent donc (ainsi que toute la droite (CD)) à un plan $\wp$ parallèle au plan (OJK), et une représentation paramétrique de ce plan est :

   $$\begin{cases} x = 11 \\ y = 4t' \\ z = t + 4t' \end{cases}, t \in \mathbf{R}; t' \in \mathbf{R}$$

   (c) $M(x;y;z) \in \wp \cap (AB) \Leftrightarrow$ il existe trois réels t, t' et k tels que :

   $$\begin{cases} x = 11 \\ y = 4t' \\ z = t + 4t' \\ x = 2k \\ y = -1 \\ z = 5 \end{cases}.$$

   Le plan $\wp$ et la droite (AB) sont sécants au point $E(11;-1;5)$.

   (d) $\overrightarrow{CE} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, donc $E \notin (CD)$. On en déduit que les droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

2. (a) $M_tN_t^2 = (11-t)^2 + (0,8t+1)^2 + (-4+0,6t)^2 = 2t^2 - 25,2t + 138$

   (b) La fonction f définie par $f(t) = 2t^2 - 25,2t + 138$ est une fonction polynôme du second degré qui admet un minimum atteint pour $t = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{25,2}{4} = 6,3$. La vitesse est donc minimale au bout de 6,3 s.