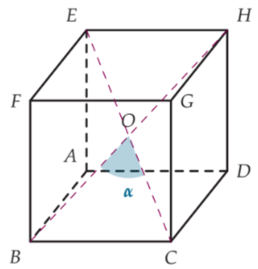
Espace – Produit scalaire
Exercices 16 et 18 page 313 et 314 (Sésamath)

Exo 16

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1 et de centre O.
Calculer une valeur approchée de la mesure de l'angle $\alpha = \widehat{BOC}$ au degré près.



Corrigé

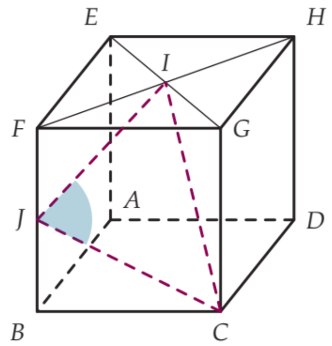
On se place dans le repère orthonormé $(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
Dans ce repère, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 0)$ et $H(0; 1; 1)$.

Ainsi, O, milieu de $[BH]$ a pour coordonnées $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, $OB\begin{pmatrix}0{,}5\\-0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$ et $OC\begin{pmatrix}0{,}5\\0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0{,}25$.

De plus, $OB = 0{,}5\sqrt{3}$ donc $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = 0{,}25 \times 3 \times \cos(\alpha)$ et ainsi, $\cos(\alpha) = \frac{1}{3}$ donc $\alpha \approx 71°$.

Exo 18

On considère un cube $ABCDEFGH$ de côté 1.
Soit I le centre de la face $EFGH$ et J le milieu de l'arête $[BF]$.



On cherche à calculer une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$ au degré près.

1. Méthode géométrique
   (a) Calculer les trois longueurs du triangle IJC.

   (b) En déduire que $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI} = \frac{1}{4}$.
   (c) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.

2. Autre méthode géométrique
   (a) Calculer $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$ en décomposant astucieusement les deux vecteurs sur les arêtes du cube.
   (b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.

3. Méthode analytique
   (a) En se plaçant dans le repère orthonormé $(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, calculer analytiquement $\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI}$.
   (b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{CJI}$.

Corrigé

1. (a) Dans le triangle JFI rectangle en F, on a :

$$JI = \sqrt{FJ^2 + FI^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dans le triangle JBC rectangle en B, on a :

$$JC = \sqrt{JB^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Dans le triangle IGC rectangle en G, on a :

$$IC = \sqrt{IG^2 + GC^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + 1} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

(b) On a :

$$\overrightarrow{JC} \cdot \overrightarrow{JI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{JC}^2 + \overrightarrow{JI}^2 - (\overrightarrow{JC} - \overrightarrow{JI})^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

(c) $\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI} = JC \times JI \times \cos\widehat{CJI} = \frac{\sqrt{15}}{4}\cos\widehat{CJI}$

Ainsi :

$$\cos\widehat{CJI} = \frac{1}{\sqrt{15}} \Leftrightarrow \widehat{CJI} = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{15}} \approx 75°$$

2. (a) $\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{JI} = \overrightarrow{JF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH}$ et ainsi :

$$\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI} = -\frac{1}{4} + 0 + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(b) Comme précédemment, $\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI} = \frac{\sqrt{15}}{4}\cos\widehat{CJI}$ et les mêmes calculs mènent au même résultat.

3. (a) $\overrightarrow{JC}\begin{pmatrix}0\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{JI}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI} = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$.

(b) On a toujours $\overrightarrow{JC}\cdot\overrightarrow{JI} = \frac{\sqrt{15}}{4}\cos\widehat{CJI}$ et les mêmes calculs mènent au même résultat.

4. (a) La méthode qui demande le moins de connaissances théoriques est la première car elle ne se base que sur le théorème de Pythagore et la formule des normes vue en classe de 1re S.
La méthode qui demande le plus de connaissances théoriques est la deuxième car elle utilise les propriétés algébriques du produit scalaire qui se démontrent à partir de la formule avec les coordonnées.

(b) La méthode la moins rapide est la première car il faut calculer chacune des longueurs à l'aide du théorème de Pythagore.
La méthode la plus rapide est la troisième car une fois les coordonnées des vecteurs données, le produit scalaire est très rapide à calculer ainsi que les normes de chacun des vecteurs.