Mon chat et les maths…

Produit scalaire dans l’espace et applications

I. <u>Produit scalaire dans l’espace</u>

II. <u>Vecteur normal à un plan</u>

III. Équation cartésienne d’un plan

Propriété - Caractérisation algébrique d’un plan

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l’espace muni d’un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

- Si M appartient à un plan $(\mathcal{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :

  $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c des réels non simultanément nuls.

III. Équation cartésienne d'un plan

Propriété - Caractérisation algébrique d'un plan

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

- Si M appartient à un plan $(\mathcal{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :

  $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c des réels non simultanément nuls.

- Réciproquement :

  L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathcal{P})$.

III. Équation cartésienne d'un plan

Propriété - Caractérisation algébrique d'un plan

Soit $M(x\,;y\,;z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

- Si M appartient à un plan $(\mathcal{P})$, alors ses coordonnées vérifient une relation du type :

  $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c des réels non simultanément nuls.

- Réciproquement :

  L'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note $(\mathcal{P})$.

On dit que $(\mathcal{P})$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

PREUVE

- Soit $(\mathcal{P})$ un plan passant par un point $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

  M appartenant à $(\mathcal{P})$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à -dire analytiquement :

$$(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + (z - z_0)\gamma = 0$$

PREUVE

- Soit $(\mathcal{P})$ un plan passant par un point $A(x_0\,; y_0\,; z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$.

  M appartenant à $(\mathcal{P})$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à -dire analytiquement :

$$(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + (z - z_0)\gamma = 0$$

  ou encore, en développant :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0 = 0$$

PREUVE

- Soit $(\mathcal{P})$ un plan passant par un point $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}$.

  M appartenant à $(\mathcal{P})$, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, c'est-à -dire analytiquement :

  $$(x-x_0)\alpha+(y-y_0)\beta+(z-z_0)\gamma=0$$

  ou encore, en développant :

  $$\alpha x+\beta y+\gamma z-\alpha x_0-\beta y_0+\gamma z_0=0$$

  Cette dernière égalité est bien de la forme annoncée en posant :

  $$a=\alpha,b=\beta,c=\gamma\ et\ d=-\alpha x_0-\beta y_0+\gamma z_0.$$

PREUVE

- a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$:
  - si $a \neq 0$, alors le triplet $\left(-\frac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ vérifie l'égalité $ax + by + cz + d = 0$;
  - si $a = 0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

PREUVE

- a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$:
  - si $a \neq 0$, alors le triplet $\left(-\frac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ vérifie l'égalité $ax + by + cz + d = 0$;
  - si $a = 0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

  Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :

$$ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

  ce qui peut aussi s'écrire :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

PREUVE

- a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $A(x_0\,;y_0\,;z_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$:
  - si $a \neq 0$, alors le triplet $\left(-\frac{d}{a}\,;0\,;0\right)$ vérifie l'égalité $ax + by + cz + d = 0$;
  - si $a = 0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

  Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :

  $$ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

  ce qui peut aussi s'écrire :

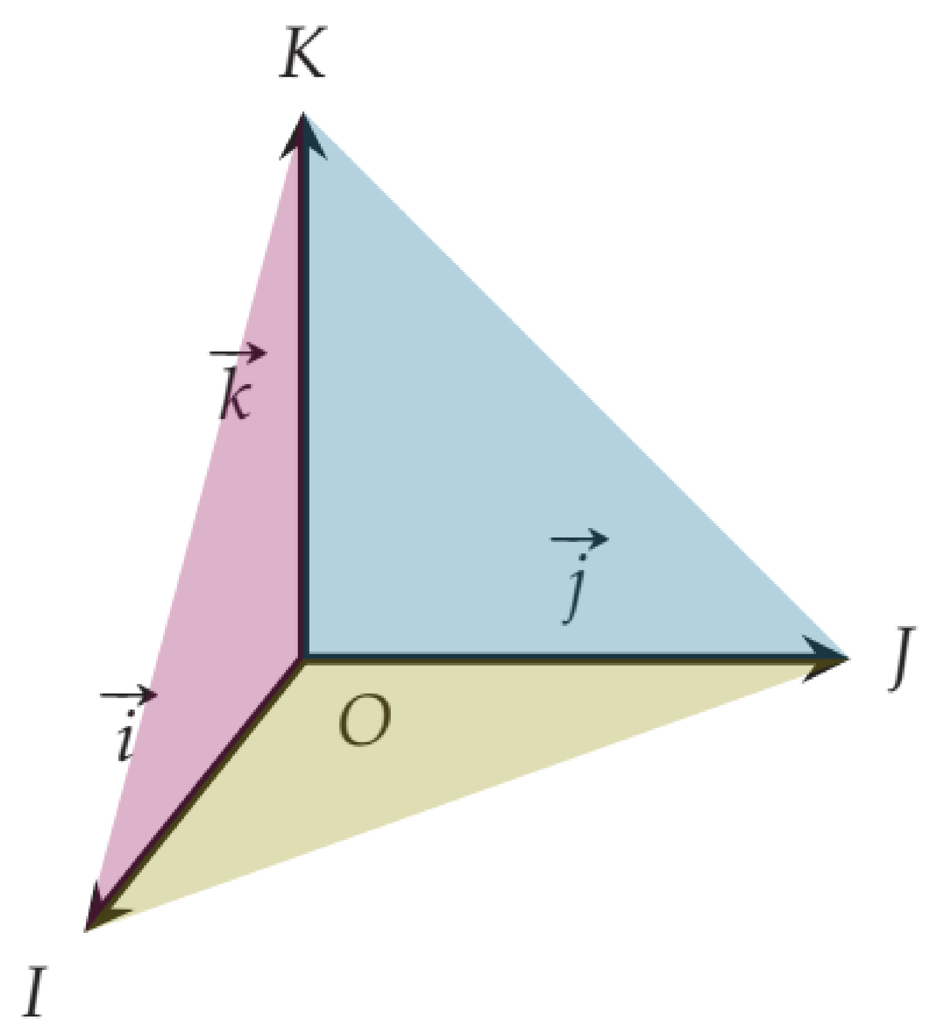
  $$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

  Cette dernière égalité n'étant rien d'autre que la traduction analytique de l'orthogonalité entre les vecteurs

  $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ $(\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0)$, on en déduit, d'après la propriété précédente, que M appartient au plan

  passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

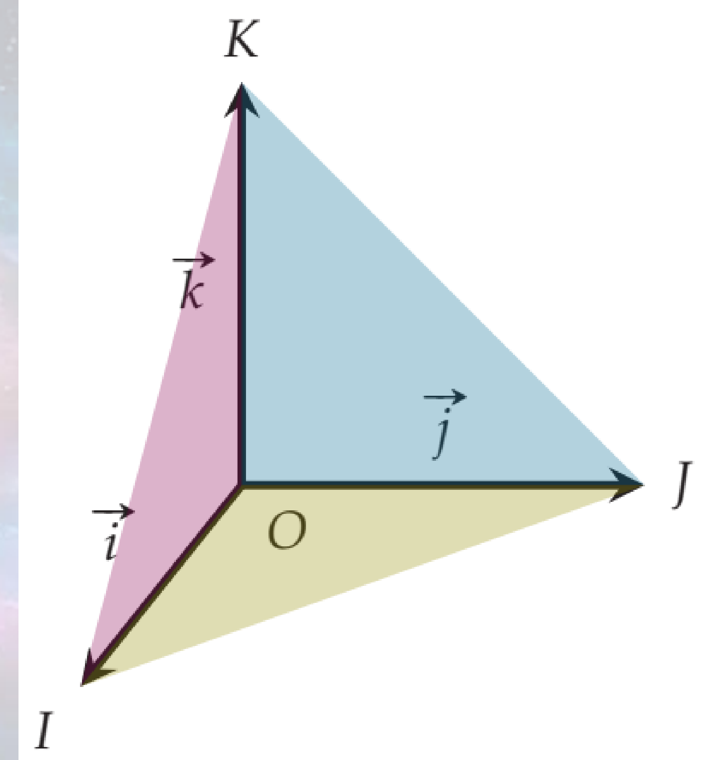
Exercice : Déterminer une équation cartésienne des plans (O, I, J); (O, I, K) ; (O, J, K)



Exemple

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

- Le plan (OJK) a pour équation $x = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{\imath}$.
- Le plan (OIK) a pour équation $y = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{\jmath}$.
- Le plan (OIJ) a pour équation $z = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur $\vec{k}$.



Méthode n°3 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier) Exo 37 page 316

Dans le cas où le plan $(\mathcal{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1. écrire l'équation de $(\mathcal{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(1\,;-2\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Méthode n°3 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier) Exo 37 page 316

Dans le cas où le plan $(\mathcal{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1. écrire l'équation de $(\mathcal{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(1\,;-2\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction

Les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ étant données, le plan $(\mathcal{P})$ admet pour équation $4x - 2y + z + d = 0$, où d est un réel qu'il reste à déterminer.

Méthode n°3 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier) Exo 37 page 316

Dans le cas où le plan $(\mathcal{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1. écrire l'équation de $(\mathcal{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(1\,;-2\,;3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction

Les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ étant données, le plan $(\mathcal{P})$ admet pour équation $4x - 2y + z + d = 0$, où d est un réel qu'il reste à déterminer.

Le point A appartient à $(\mathcal{P})$ donc $4 \times 1 - 2 \times (-2) + 3 + d = 0$, ce qui donne $d = -11$.

Méthode n°3 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier) Exo 37 page 316

Dans le cas où le plan $(\mathcal{P})$ est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1. écrire l'équation de $(\mathcal{P})$ sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ passant par $A(1\,; -2\,; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction

Les coordonnées du vecteur $\vec{n}$ étant données, le plan $(\mathcal{P})$ admet pour équation $4x - 2y + z + d = 0$, où d est un réel qu'il reste à déterminer.

Le point A appartient à $(\mathcal{P})$ donc $4 \times 1 - 2 \times (-2) + 3 + d = 0$, ce qui donne $d = -11$.

Ainsi, une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ est : $4x - 2y + z - 11 = 0$.

Exercices Sésamath page 316

37 ► MÉTHODE 3 p. 309

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{P})$ passant par $A(-1\,;2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$.

41 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$, parallèle au plan $(\mathscr{P})$ et passant par le point A lorsque :

1) $(\mathscr{P}) : x+y+z-1=0$ et $A(1\,;1\,;1)$;
2) $(\mathscr{P}) : x-3y+2z-4=0$ et $A(3\,;0\,;-1)$;
3) $(\mathscr{P}) : \dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{6}y-z-2=0$ et $A\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{1}{6}\right)$;
4) $(\mathscr{P}) : \sqrt{5}x-2y-\sqrt{2}z-4=0$ et $A(1\,;1\,;-1)$.

39 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par :

1) $A(2\,;1\,;0)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{OA}$;
2) $A\left(\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\,;2\right)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{AO}$;
3) $A(5\,;-3\,;4)$ et de vecteur normal $\vec{k}$;
4) $A(2\,;-1\,;\sqrt{3})$ et de vecteur normal $\vec{i}-\dfrac{3}{2}\vec{j}$.

42 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, décrire, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que :

1) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ avec $A(1\,;-2\,;3)$ et $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$;
2) $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}=3$;
3) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{j}=-1$ avec $A(1\,;-2\,;3)$;
4) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=5$ avec $A(-2\,;4\,;1)$ et $\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$.

Méthode n°4 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général) Exo 46 page 316

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathcal{P})$:

Méthode n°4 - Déterminer une équation cartésienne d’un plan (cas général) Exo 46 page 316

Dans le cas où l’on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathcal{P})$:

1. s’assurer que le plan $(\mathcal{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;

Méthode n°4 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général) Exo 46 page 316

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathcal{P})$:

1. s'assurer que le plan $(\mathcal{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
2. déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $(\mathcal{P})$;

Méthode n°4 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général) Exo 46 page 316

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathcal{P})$:

1. s'assurer que le plan $(\mathcal{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
2. déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $(\mathcal{P})$;
3. en déduire une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ en se référant à la méthode précédente.

Méthode n°4 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général) Exo 46 page 316

Dans le cas où l'on donne trois points A, B et C pour définir un plan $(\mathcal{P})$:

1. s'assurer que le plan $(\mathcal{P})$ est bien défini en montrant que A, B et C ne sont pas alignés ;
2. déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à $(\mathcal{P})$;
3. en déduire une équation cartésienne de $(\mathcal{P})$ en se référant à la méthode précédente.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, , on considère les points $A(0\,;1\,;1)$, $B(-4\,;2\,;3)$ et $C(4\,;-1\,;1)$.

Déterminer, s'il existe, une équation cartésienne du plan $(\mathcal{P})$ défini par ces trois points.

Correction

On commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan $(\mathcal{P})$.

Correction

On commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan $(\mathcal{P})$.

On note $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, ce qui donne les équations $-4a+b+2c=0$ et $4a-2b=0$, d'où le système équivalent :

Correction

On commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan $(\mathcal{P})$.

On note $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, ce qui donne les équations $-4a+b+2c=0$ et $4a-2b=0$, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases}-8a+2b+4c & = & 0\\ 4a-2b & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4a+4c & = & 0\\ 4a-2b & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a & = & c\\ b & = & 2a\end{cases}$$

Correction

On commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan $(\mathcal{P})$.

On note $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, ce qui donne les équations $-4a+b+2c=0$ et $4a-2b=0$, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases}-8a+2b+4c & = & 0\\ 4a-2b & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4a+4c & = & 0\\ 4a-2b & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a & = & c\\ b & = & 2a\end{cases}$$

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix}a\\2a\\a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}^*$.

Correction

On commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan $(\mathcal{P})$.

On note $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, ce qui donne les équations $-4a+b+2c=0$ et $4a-2b=0$, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases}-8a+2b+4c & = & 0\\ 4a-2b & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4a+4c & = & 0\\ 4a-2b & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a & = & c\\ b & = & 2a\end{cases}$$

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix}a\\2a\\a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}^*$.

Avec $a=1$, on obtient $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Correction

On commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan $(\mathcal{P})$.

On note $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, ce qui donne les équations $-4a+b+2c=0$ et $4a-2b=0$, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases}-8a+2b+4c & = & 0\\ 4a-2b & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4a+4c & = & 0\\ 4a-2b & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a & = & c\\ b & = & 2a\end{cases}$$

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix}a\\2a\\a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}^*$.

Avec $a=1$, on obtient $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $(\mathcal{P})$: $x+2y+z+d=0$ où d est un réel qu'il reste à déterminer.

Correction

On commence par calculer les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A, B et C définissent bien un plan $(\mathcal{P})$.

On note $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathcal{P})$.

Alors $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$, ce qui donne les équations $-4a+b+2c=0$ et $4a-2b=0$, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases}-8a+2b+4c & = & 0\\ 4a-2b & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4a+4c & = & 0\\ 4a-2b & = & 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a & = & c\\ b & = & 2a\end{cases}$$

Les coordonnées de $\vec{n}$ sont donc de la forme $\begin{pmatrix}a\\2a\\a\end{pmatrix}$, $a\in\mathbb{R}^*$.

Avec $a=1$, on obtient $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $(\mathcal{P})\colon x+2y+z+d=0$ où d est un réel qu'il reste à déterminer.

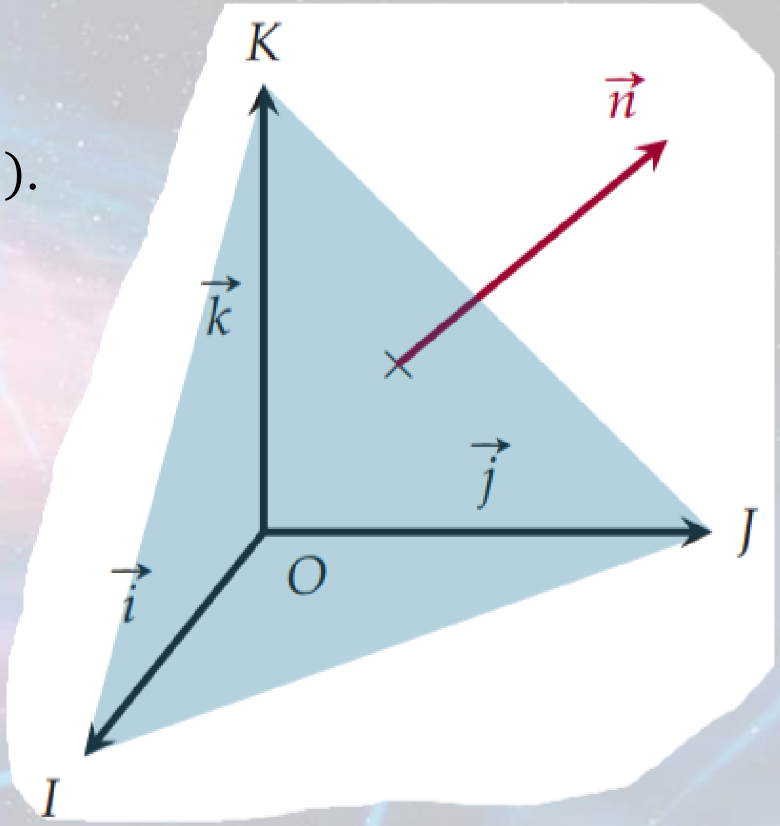
L'appartenance du point A à $(\mathcal{P})$ donne $d=-3$ et donc $(\mathcal{P})\colon x+2y+z-3=0$.

Exemple

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Dans ce repère on considère les points $I(1\,;0\,;0)$, $J(0\,;1\,;0)$ et $K(0\,;0\,;1)$.

Déterminer une équation catésienne du plan (IJK).

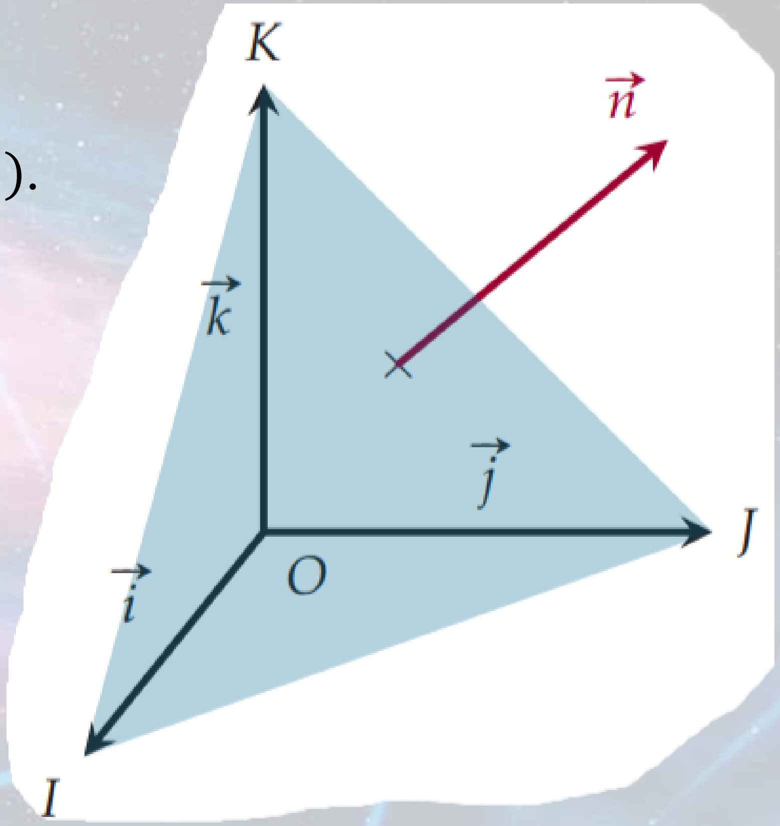


Exemple

On munit l’espace d’un repère orthonormé $(O\ ;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

Dans ce repère on considère les points $I(1\ ;0\ ;0)$, $J(0\ ;1\ ;0)$ et $K(0\ ;0\ ;1)$.

Déterminer une équation catésienne du plan (IJK).



Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-1=0$ et admet pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercices Sésamath page 317

46 ▶ MÉTHODE 4 p. 309

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les trois points $A(-1\,;-1\,;1)$, $B(1\,;2\,;-1)$ et $C(0\,;1\,;1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) s'il existe.

48 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x &= 1-s+4t \\ y &= 2+2s-t \\ y &= -1+s+2t \end{cases}, \quad s\in\mathbb{R},\quad t\in\mathbb{R}.$$

1) Cette représentation paramétrique définit-elle un plan ?

2) Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

Méthode n°5 – Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan (Ex 52 page 318)

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

Méthode n°5 – Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan (Ex 52 page 318)

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathcal{P})$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:

Méthode n°5 – Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan (Ex 52 page 318)

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathcal{P})$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:

   (a) si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathcal{P})$;

Méthode n°5 – Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan (Ex 52 page 318)

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathcal{P})$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:

   (a) si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathcal{P})$;

   (b) si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M.

Méthode n°5 – Déterminer, si elle existe, l’intersection d’une droite et d’un plan (Ex 52 page 318)

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathcal{P})$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:

   (a) si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathcal{P})$;

   (b) si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M.

2. Si l’intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et $(\mathcal{P})$ afin de calculer les coordonnées de M.

Méthode n°5 – Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan (Ex 52 page 318)

Soient (d) une droite dirigée par $\vec{u}$ et $(\mathcal{P})$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

1. Tester le parallélisme de (d) et $(\mathcal{P})$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:

   (a) si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à $(\mathcal{P})$;

   (b) si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M.

2. Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et $(\mathcal{P})$ afin de calculer les coordonnées de M.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère la droite (d) de représentation

paramétrique $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \\ z = 5 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et le plan $(\mathcal{P})$ d'équation cartésienne $3x + z + 7 = 0$.

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathcal{P})$.

Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{n}=-3$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{n} = -3$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x & = & 1-t \\ y & = & 2t \\ z & = & 5 \\ 3x+z+7 & = & 0 \end{cases}$$

Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{n} = -3$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 2t \\ z &= 5 \\ 3x+z+7 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1-t \\ y &= 2t \\ z &= 5 \\ 3(1-t)+5+7 &= 0 \end{cases}$$

Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{n} = -3$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x & = & 1-t \\ y & = & 2t \\ z & = & 5 \\ 3x+z+7 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1-t \\ y & = & 2t \\ z & = & 5 \\ 3(1-t)+5+7 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = & 5 \\ x & = & -4 \\ y & = & 10 \\ z & = & 5 \end{cases}$$

Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathcal{P})$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\0\\1\end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{u}\cdot\vec{n}=-3$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x & = & 1-t \\ y & = & 2t \\ z & = & 5 \\ 3x+z+7 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & 1-t \\ y & = & 2t \\ z & = & 5 \\ 3(1-t)+5+7 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t & = & 5 \\ x & = & -4 \\ y & = & 10 \\ z & = & 5 \end{cases}$$

Ainsi, $M(-4\,;10\,;5)$.

Exercice d'application

Même consigne avec la droite (d): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t, \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$ et le plan $(\mathcal{P})$: $-6x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Exercice d'application

Même consigne avec la droite (d): $\begin{cases} x &= & 1-t \\ y &= & 2-2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= & 3+5t \end{cases}$ et le plan $(\mathcal{P})$: $-6x-2y-2z+1=0$.

Correction

Avec les mêmes notations que précédemment, $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice d'application

Même consigne avec la droite (d): $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3 + 5t \end{cases}$ et le plan $(\mathcal{P})$: $-6x - 2y - 2z + 1 = 0$.

Correction

Avec les mêmes notations que précédemment, $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ sont parallèles.

Exercice d'application

Même consigne avec la droite (d): $\begin{cases} x &= & 1-t \\ y &= & 2-2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= & 3+5t \end{cases}$ et le plan $(\mathcal{P})$: $-6x-2y-2z+1=0$.

Correction

Avec les mêmes notations que précédemment, $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ sont parallèles.

De plus, le point $A(1\,;2\,;3)$ par lequel passe (d) n'appartient pas à $(\mathcal{P})$ donc (d) et $(\mathcal{P})$ sont strictement parallèles.

Exercices Sésamath page 318

52 ► **MÉTHODE 5** p. 310

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -7+t \\ y = 4+2t \\ z = -5-t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne :

$$-2x-3y+z-6=0.$$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

53 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite

$$(d) : \begin{cases} x = -1-2s \\ y = 2-s \\ z = -3+5s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$$

et le plan

$$(\mathscr{P}) : -x-5y-z-6=0.$$

56 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) engendrée par $A(6\,;-2\,;-3)$ et $\vec{u} = 5\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$ et le plan $(\mathscr{P})$: $-5x-7y+10z+6=0$.

57 Même raisonnement qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(-5\,;4\,;-3)$ et $B(1\,;-2\,;3)$ et le plan $(\mathscr{P})$: $x+y+3z-1=0$.

Méthode n°6 - Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans (Ex 66 page 319)

Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.

Méthode n°6 - Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans (Ex 66 page 319)

Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.

1. Tester le parallélisme de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.

Méthode n°6 - Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans (Ex 66 page 319)

Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.

1. Tester le parallélisme de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.
2. Si les plans ne sont pas parallèles :

Méthode n°6 - Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans (Ex 66 page 319)

Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.

1. Tester le parallélisme de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.
2. Si les plans ne sont pas parallèles :

   (a) écrire le système composé des équations décrivant $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;

Méthode n°6 - Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans (Ex 66 page 319)

Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.

1. Tester le parallélisme de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.
2. Si les plans ne sont pas parallèles :

   (a) écrire le système composé des équations décrivant $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;

   (b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;

Méthode n°6 - Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans (Ex 66 page 319)

Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.

1. Tester le parallélisme de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.
2. Si les plans ne sont pas parallèles :

   (a) écrire le système composé des équations décrivant $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;

   (b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;

   (c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Méthode n°6 - Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans (Ex 66 page 319)

Soient $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ deux plans de vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.

1. Tester le parallélisme de $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ en testant la colinéarité de $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$.
2. Si les plans ne sont pas parallèles :

   (a) écrire le système composé des équations décrivant $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$;

   (b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;

   (c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives

$$x + 2y + z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x - 3y - z + 2 = 0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives

$$x+2y+z-1=0 \text{ et } 2x-3y-z+2=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Correction

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives

$$x+2y+z-1=0 \text{ et } 2x-3y-z+2=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Correction

$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives

$$x+2y+z-1=0 \text{ et } 2x-3y-z+2=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Correction

$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

Ils ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ se coupent selon une droite (d).

Exercice d’application

Dans l’espace muni d’un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d’équations respectives

$$x+2y+z-1=0 \text{ et } 2x-3y-z+2=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d’intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Correction

$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

Ils ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ se coupent selon une droite (d).

Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x+2y+z-1 &= 0\\ 2x-3y-z+2 &= 0 \\ \end{cases}$$

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives

$$x + 2y + z - 1 = 0 \text{ et } 2x - 3y - z + 2 = 0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Correction

$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

Ils ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ se coupent selon une droite (d).

Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 & = & 0 \\ 2x - 3y - z + 2 & = & 0 \\ & & \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z - 1 & = & 0 \\ 3x - y + 1 & = & 0 \\ & & \end{cases}$$

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives

$$x+2y+z-1=0 \text{ et } 2x-3y-z+2=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Correction

$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

Ils ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ se coupent selon une droite (d).

Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x+2y+z-1 &= 0\\ 2x-3y-z+2 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z-1 &= 0\\ 3x-y+1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= 3x+1\\ z &= 1-x-2y=-7x-1 \end{cases}$$

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives

$$x+2y+z-1=0 \text{ et } 2x-3y-z+2=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Correction

$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

Ils ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ se coupent selon une droite (d).

Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x+2y+z-1 & = & 0 \\ 2x-3y-z+2 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z-1 & = & 0 \\ 3x-y+1 & = & 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y & = & 3x+1 \\ z & = & 1-x-2y=-7x-1 \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de M sont de la forme $(x\,;3x+1\,;-7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ et donc, en choisissant x comme paramètre, on obtient une représentation paramétrique de (d) :

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives

$$x+2y+z-1=0 \text{ et } 2x-3y-z+2=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$.

Correction

$(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}2\\-3\\-1\end{pmatrix}$.

Ils ne sont pas colinéaires donc $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ se coupent selon une droite (d).

Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x+2y+z-1 = 0 \\ 2x-3y-z+2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y+z-1 = 0 \\ 3x-y+1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x+1 \\ z = 1-x-2y = -7x-1 \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de M sont de la forme $(x\,;3x+1\,;-7x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ et donc, en choisissant x comme paramètre, on obtient une représentation paramétrique de (d) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1+3t \\ z = -1-7t \end{cases},\quad t\in\mathbb{R}.$$

Exercice d'application

Même consigne avec les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives $2x - 4y + 3z - 5 = 0$ et $-4x + 8y - 6z + 10 = 0$.

Exercice d'application

Même consigne avec les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives $2x - 4y + 3z - 5 = 0$ et $-4x + 8y - 6z + 10 = 0$.

Correction

En reprenant les mêmes notations, $n_1\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $n_2\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans sont parallèles.

Exercice d'application

Même consigne avec les plans $(\mathcal{P}_1)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équations respectives $2x - 4y + 3z - 5 = 0$ et $-4x + 8y - 6z + 10 = 0$.

Correction

En reprenant les mêmes notations, $n_1\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $n_2\begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans sont parallèles.

Comme les deux équations sont équivalentes, on en déduit que $(\mathcal{P}_1) = (\mathcal{P}_2)$.