Exercices du livre Sésamath

Exercice n°24 page 315

24 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère $\vec{u}\begin{pmatrix}k\\-2\\k-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\k\\k\end{pmatrix}$, où $k\in\mathbb{R}$. Déterminer la ou les valeurs de k pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

Corrigé

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \iff 2\times k+(-2)\times k+(k-1)\times k=0$$

$$\iff k(k-1)=0 \iff k=0 \ ou \ k=1$$

Exercice n°26 page 315

26 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les deux points $A(1;2;1)$, $B(4;6;3)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1) Démontrer que le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.

2) Démontrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal à ce plan.

Corrigé

1) Montrons que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

$$\vec{u}=k\,\vec{v} \iff \begin{cases}-2=k\times 0\\ 1=k\times(-1)\\ 1=k\times 2\end{cases}$$ ce qui est impossible.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires donc A, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ définissent bien un plan.

2) $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan si il est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui dirigent celui-ci c'est-à-dire si $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0$ et $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}=-6+4+2=0$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\4\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}=0-4+4=0$$

Donc $\overrightarrow{AB}$ est normal au plan.

Exercice n°28 page 315

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$ et K le centre de la face $CDHG$.

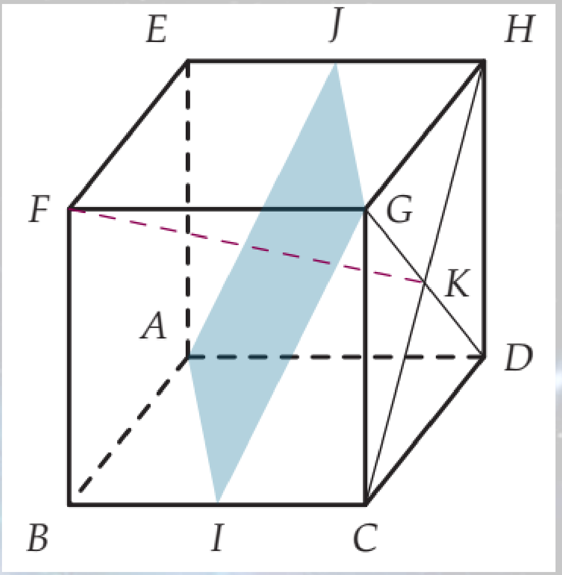
Sans utiliser de repère :

1) démontrer que les points A, I, G et J sont coplanaires ;

2) a) démontrer que (FK) est orthogonale à (IJ) ;

b) démontrer que (FK) est orthogonale à (AI) ;

c) en déduire que (FK) est orthogonale au plan (AIG).



Corrigé

1) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{GJ} = \overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IA}$ donc J appartient au plan engendré par I, $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IA}$.

2) a) $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GK}) \cdot \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{HC} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{HC}$. D'une part, $\overrightarrow{FG}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc est orthogonal à $\overrightarrow{HC}$. D'autre part, (GK) et (HC) sont les diagonales d'un carré, donc orthogonales. Ainsi, $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$.

b) $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{JG} = \overrightarrow{FG} \cdot \overrightarrow{JG} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{JG} = 1 \times \dfrac{1}{2} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{JH} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{HG} = \dfrac{1}{2} + \overrightarrow{GK} \cdot \overrightarrow{JH} - \dfrac{1}{2}$.

Or, $\overrightarrow{JH}$ est un vecteur normal au plan $(CDGH)$ donc orthogonal à $\overrightarrow{GK}$. Ainsi, $\overrightarrow{FK} \cdot \overrightarrow{AI} = 0$.

c) (FK) est orthogonale à deux droites sécantes du plan (AIG), donc orthogonale à ce plan.

Exercice n°28 page 315

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les milieux respectifs de $[BC]$ et $[EH]$ et K le centre de la face $CDHG$.

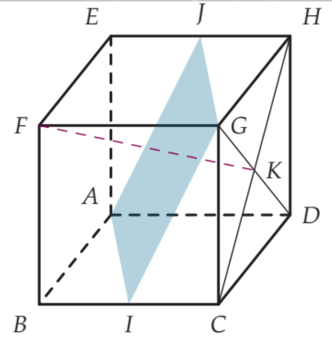
Sans utiliser de repère :

1) démontrer que les points A, I, G et J sont coplanaires ;

2) a) démontrer que (FK) est orthogonale à (IJ) ;

b) démontrer que (FK) est orthogonale à (AI) ;

c) en déduire que (FK) est orthogonale au plan (AIG).



Exercice n°29 page 315

Reprendre l'exercice 28 en travaillant dans un repère orthonormé bien choisi.

On se place dans le repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$.

1) $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\\1\end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires donc le point A et ces deux vecteurs définissent bien un plan.

De plus, $\overrightarrow{AG}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AJ}$ donc G appartient bien au plan engendré par A, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$.

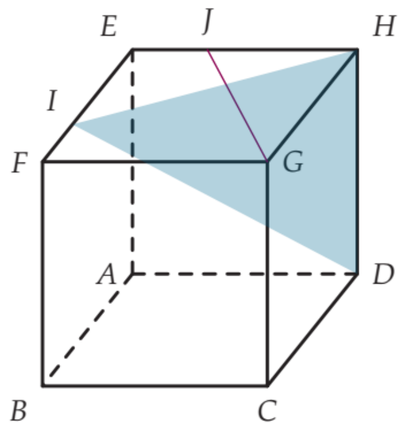
2) (a) On a $\overrightarrow{FK}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et donc $\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}=0$ donc les droites (FK) et (IJ) sont orthogonales.

(b) $\overrightarrow{FK}\cdot\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0=0$ donc les droites (FK) et (AI) sont orthogonales.

(c) (FK) est une droite orthogonale aux deux droites (IJ) et (AI), qui sont deux droites sécantes du plan (AIG) donc (FK) est orthogonale au plan (AIG).

Exercice n°32 page 315

32 On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 1. Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{EI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EH}$.



1) Démontrer que (GJ) est perpendiculaire à (IH).
2) Démontrer que (GJ) est orthogonale à (HD).
3) En déduire que (GJ) est orthogonale à (ID).

Correction

1. $\overrightarrow{GJ} \cdot \overrightarrow{IH} = \left(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HJ}\right) \cdot \left(\overrightarrow{IE} + \overrightarrow{EH}\right) = \frac{2}{3} + 0 + 0 - \frac{2}{3} = 0$ donc (GJ) et (IH) sont orthogonales. De plus, elles sont contenues dans le même plan représenté par la face supérieure du cube donc elles sont bien perpendiculaires.

2. (HD) est orthogonale à (EH) et (HG) qui sont deux droites sécantes du plan (EHG) donc elle est orthogonale à toute droite contenue dans ce plan, en particulier à (GJ).

3. (GJ) est orthogonale à (IH) et (HD) qui sont deux droites sécantes du plan (IHD) donc elle est orthogonale à toute droite contenue dans ce plan, en particulier à (ID).