Nombres premiers – Bac 2019

Exercice 1

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

Partie A :
Les questions 1., 2. *et* 3. *sont indépendantes*

1. Sans justifier, donner deux nombres premiers x, et y tels que $40 = x + y$.
2. On considère l'équation $20x + 19y = 40$, où x et y désignent deux, entiers relatifs.
   Résoudre cette équation.
3. Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque : $40 = 2^2 + 6^2$. On veut savoir si 40, est aussi différence de deux carrés, autrement dit s'intéresser à l'équation $x^2 - y^2 = 40$, où x et y désignent deux entiers naturels.
   (a) Donner la décomposition de 40 en produit de facteurs premiers.
   (b) Montrer que, si x et y désignent des entiers naturels, les nombres $x - y$ et $x + y$ ont la même parité.
   (c) Déterminer toutes les solutions de l'équation $x^2 - y^2 = 40$ où x et y désignent deux entiers naturels.

Partie B : sommes de cubes
Les questions 1. *et* 2. *sont indépendantes.*

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels.
Par exemple :

$$13 = 4^3 + 7^3 + 7^3 - 9^3 - 2^3$$
$$13 = -1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 2^3$$
$$13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier sommes de cubes à la place de sommes ou différence de cubes d'entiers naturels .
Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en somme de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en somme de 4 cubes.

1. (a) En utilisant l'égalité $13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$, donner une décomposition de 40 en somme de 5 cubes.
   (b) On admet que pour tout entier naturel n on a :
   $$6n = (n+1)^3 + (n-1)^3 - n^3 - n^3$$
   En déduire une décomposition de 48 en « somme » de 4 cubes, puis une décomposition de 40 en « somme » de 5 cubes, différente de celle donnée en 1. a.)

2. Le nombre 40 est une somme de 4 cubes : $40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$.
   On veut savoir si 40 peut être décomposé en somme de 3 cubes.
   (a) Recopier et compléter sans justifier:

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9					1				

   (b) On déduit du tableau précédent que, pour tout entier naturel n, l'entier naturel n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à -1.
   Prouver que 40 ne peut pas être décomposé en somme de 3 cubes.

Exercice 2

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1}+1}{5}$$

1. Calculer a_2 et a_3.
2. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 16a_n - 3$.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, a_n est un nombre entier naturel.
4. Dans cette question on utilise l'égalité de la question **2.** afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).
   (a) Pour tout entier naturel n, on note d_n le plus grand diviseur commun de a_n et a_{n+1}.
   Démontrer que, pour tout entier naturel n, d_n est égal à 1 ou à 3.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} \equiv a_n \ [3]$.
   (c) Vérifier que $a_0 \equiv 1 \ [3]$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, le nombre a_n n'est pas divisible par 3.
   (d) Démontrer alors que, pour tout entier naturel n, a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

5. L'objectif de cette question est de démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, le nombre a_n n'est pas premier.
   On pose, pour tout entier naturel n,
   $$b_n = 2^{n+1}(2^n - 1) + 1 \quad \text{et} \quad c_n = 2^{n+1}(2^n + 1) + 1.$$
   On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
   $$5a_n = b_n c_n.$$

   (a) Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2,
   $$5 \text{ divise } b_n \quad \text{ou} \quad 5 \text{ divise } c_n.$$

   (b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Démontrer que $b_n > 5$ et $c_n > 5$.
   (c) En déduire que a_n n'est pas un nombre premier.