

Mon chat et les maths...



Produit scalaire dans l'espace et applications

I. Produit scalaire dans l'espace

II. Vecteur normal à un plan

III. Équation cartésienne d'un plan

Propriété - Caractérisation algébrique d'un plan

Soit $M(x ; y ; z)$ un point de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Si M appartient à un plan (\mathcal{P}) , alors ses coordonnées vérifient une relation du type :

$$ax + by + cz + d = 0, \text{ avec } a, b \text{ et } c \text{ des réels non simultanément nuls.}$$

- Réciproquement :

L'ensemble des points $M(x ; y ; z)$ de l'espace vérifiant une relation du type $ax + by + cz + d = 0$, avec a, b et c non simultanément nuls est un plan, que l'on note (\mathcal{P}) .

On dit que (\mathcal{P}) a pour équation $ax + by + cz + d = 0$, appelée équation cartésienne du plan et de plus, $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (\mathcal{P}) .

PREUVE

- Soit (\mathcal{P}) un plan passant par un point $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$.

M appartenant à (\mathcal{P}) , les vecteurs \overrightarrow{AM} et \vec{n} sont orthogonaux, c'est-à-dire analytiquement :

$$(x - x_0)\alpha + (y - y_0)\beta + (z - z_0)\gamma = 0$$

ou encore, en développant :

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - \alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0 = 0$$

Cette dernière égalité est bien de la forme annoncée en posant :

$$a = \alpha, b = \beta, c = \gamma \text{ et } d = -\alpha x_0 - \beta y_0 + \gamma z_0.$$

PREUVE

- a, b et c n'étant pas simultanément nuls, il existe $A(x_0 ; y_0 ; z_0)$ tel que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$:
 - si $a \neq 0$, alors le triplet $\left(-\frac{d}{a} ; 0 ; 0\right)$ vérifie l'égalité $ax + by + cz + d = 0$;
 - si $a = 0$, on peut procéder de façon similaire puisqu'alors $b \neq 0$ ou $c \neq 0$.

Les coordonnées du point M vérifiant aussi l'égalité, on en déduit que :

$$ax + by + cz + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Cette dernière égalité n'étant rien d'autre que la traduction analytique de l'orthogonalité entre les vecteurs

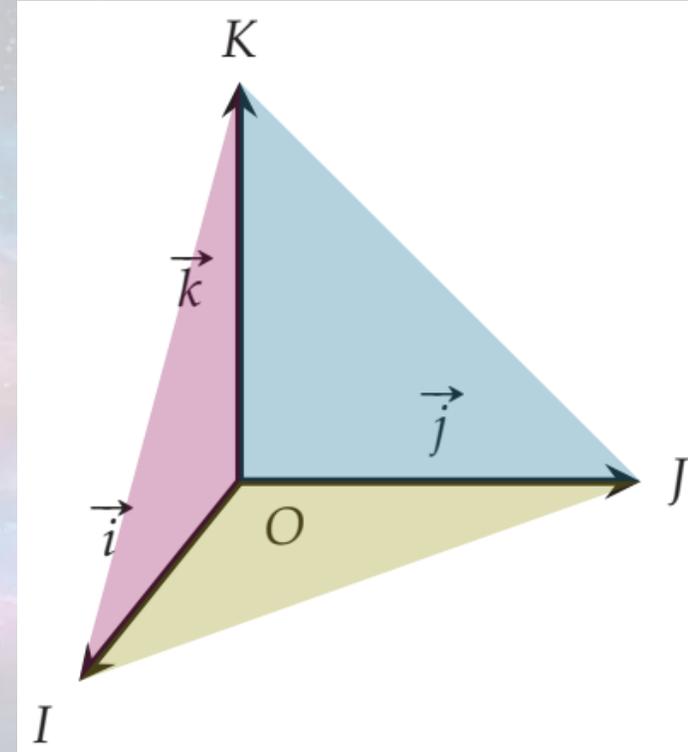
\overrightarrow{AM} et $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ($\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$), on en déduit, d'après la propriété précédente, que M appartient au plan

passant par A et de vecteur normal \vec{n} .

Exemple

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Le plan (OJK) a pour équation $x = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur \vec{i} .
- Le plan (OIK) a pour équation $y = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur \vec{j} .
- Le plan (OIJ) a pour équation $z = 0$ et admet pour vecteur normal le vecteur \vec{k} .



Méthode n°3 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas particulier) Exo 37 page 316

Dans le cas où le plan (\mathcal{P}) est défini par un point A et un vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$:

1. écrire l'équation de (\mathcal{P}) sous la forme $ax + by + cz + d = 0$ où le réel d reste à déterminer ;
2. déterminer d en utilisant les coordonnées du point A .

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}) passant par $A(1 ; -2 ; 3)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Correction

Les coordonnées du vecteur \vec{n} étant données, le plan (\mathcal{P}) admet pour équation $4x - 2y + z + d = 0$, où d est un réel qu'il reste à déterminer.

Le point A appartient à (\mathcal{P}) donc $4 \times 1 - 2 \times (-2) + 3 + d = 0$, ce qui donne $d = -11$.

Ainsi, une équation cartésienne de (\mathcal{P}) est : $4x - 2y + z - 11 = 0$.

Exercices Sésamath page 316

37 ► MÉTHODE 3 p. 309

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}) passant par $A(-1; 2; -1)$ et de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

41 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan (\mathcal{Q}) , parallèle au plan (\mathcal{P}) et passant par le point A lorsque :

- 1) $(\mathcal{P}) : x + y + z - 1 = 0$ et $A(1; 1; 1)$;
- 2) $(\mathcal{P}) : x - 3y + 2z - 4 = 0$ et $A(3; 0; -1)$;
- 3) $(\mathcal{P}) : \frac{1}{3}x - \frac{5}{6}y - z - 2 = 0$ et $A\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; \frac{1}{6}\right)$;
- 4) $(\mathcal{P}) : \sqrt{5}x - 2y - \sqrt{2}z - 4 = 0$ et $A(1; 1; -1)$.

39 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan passant par :

- 1) $A(2; 1; 0)$ et de vecteur normal \overrightarrow{OA} ;
- 2) $A(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2)$ et de vecteur normal \overrightarrow{AO} ;
- 3) $A(5; -3; 4)$ et de vecteur normal \vec{k} ;
- 4) $A(2; -1; \sqrt{3})$ et de vecteur normal $\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$.

42 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, décrire, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

- 1) $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ avec $A(1; -2; 3)$ et $\vec{n} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$;
- 2) $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} = 3$;
- 3) $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{j} = -1$ avec $A(1; -2; 3)$;
- 4) $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 5$ avec $A(-2; 4; 1)$ et $\vec{n} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Méthode n°4 - Déterminer une équation cartésienne d'un plan (cas général) Exo 46 page 316

Dans le cas où l'on donne trois points A , B et C pour définir un plan (\mathcal{P}) :

1. s'assurer que le plan (\mathcal{P}) est bien défini en montrant que A , B et C ne sont pas alignés ;
2. déterminer les coordonnées d'un vecteur normal à (\mathcal{P}) ;
3. en déduire une équation cartésienne de (\mathcal{P}) en se référant à la méthode précédente.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(0 ; 1 ; 1)$, $B(-4 ; 2 ; 3)$ et $C(4 ; -1 ; 1)$.

Déterminer, s'il existe, une équation cartésienne du plan (\mathcal{P}) défini par ces trois points.

Correction

On commence par calculer les coordonnées de \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} : $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles et donc les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et ainsi, les trois points A , B et C définissent bien un plan (\mathcal{P}) .

On note $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur normal à (\mathcal{P}) .

Alors $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$, ce qui donne les équations $-4a + b + 2c = 0$ et $4a - 2b = 0$, d'où le système équivalent :

$$\begin{cases} -8a + 2b + 4c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 4c = 0 \\ 4a - 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = 2a \end{cases}$$

Les coordonnées de \vec{n} sont donc de la forme $\begin{pmatrix} a \\ 2a \\ a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}^*$.

Avec $a = 1$, on obtient $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $(\mathcal{P}) : x + 2y + z + d = 0$ où d est un réel qu'il reste à déterminer.

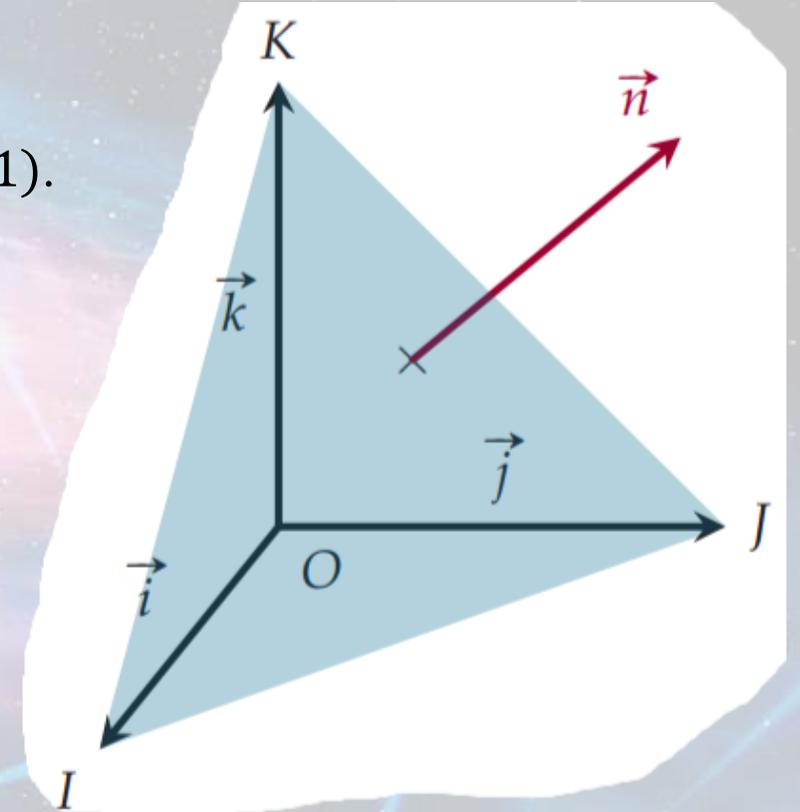
L'appartenance du point A à (\mathcal{P}) donne $d = -3$ et donc $(\mathcal{P}) : x + 2y + z - 3 = 0$.

Exemple

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans ce repère on considère les points $I(1 ; 0 ; 0)$, $J(0 ; 1 ; 0)$ et $K(0 ; 0 ; 1)$.

Déterminer une équation catésienne du plan (IJK) .



Le plan (IJK) a pour équation $x + y + z - 1 = 0$ et admet pour vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Exercices Sésamath page 317

46 ► **MÉTHODE 4** p. 309

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les trois points $A(-1; -1; 1)$, $B(1; 2; -1)$ et $C(0; 1; 1)$.

Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC) s'il existe.

48 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 1 - s + 4t \\ y = 2 + 2s - t \\ z = -1 + s + 2t \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 1) Cette représentation paramétrique définit-elle un plan ?
- 2) Si oui, en déterminer une équation cartésienne.

Méthode n°5 – Déterminer, si elle existe, l'intersection d'une droite et d'un plan (Ex 52 page 318)

Soient (d) une droite dirigée par \vec{u} et (\mathcal{P}) un plan de vecteur normal \vec{n} .

1. Tester le parallélisme de (d) et (\mathcal{P}) en calculant $\vec{u} \cdot \vec{n}$:
 - (a) si $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$, alors (d) est parallèle, strictement ou non, à (\mathcal{P}) ;
 - (b) si $\vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$, alors (d) et (\mathcal{P}) se coupent en un point M .
2. Si l'intersection existe, résoudre le système composé des équations décrivant (d) et (\mathcal{P}) afin de calculer les coordonnées de M .

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite (d) de représentation

$$\text{paramétrique } \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= 2t \\ z &= 5 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et le plan } (\mathcal{P}) \text{ d'équation cartésienne } 3x + z + 7 = 0.$$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de (\mathcal{P}) .

Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de (\mathcal{P}) sont respectivement $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\vec{u} \cdot \vec{n} = -3$ donc (d) et (\mathcal{P}) se coupent en un point M dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= 2t \\ z &= 5 \\ 3x + z + 7 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= 2t \\ z &= 5 \\ 3(1 - t) + 5 + 7 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t &= 5 \\ x &= -4 \\ y &= 10 \\ z &= 5 \end{cases}$$

Ainsi, $M(-4 ; 10 ; 5)$.

Exercice d'application

Même consigne avec la droite (d) :
$$\begin{cases} x &= 1 - t \\ y &= 2 - 2t, \quad t \in \mathbb{R} \text{ et le plan } (\mathcal{P}): -6x - 2y - 2z + 1 = 0. \\ z &= 3 + 5t \end{cases}$$

Correction

Avec les mêmes notations que précédemment, $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ donc (d) et (\mathcal{P}) sont parallèles.

De plus, le point $A(1 ; 2 ; 3)$ par lequel passe (d) n'appartient pas à (\mathcal{P}) donc (d) et (\mathcal{P}) sont strictement parallèles.

Exercices Sésamath page 318

52 ► **MÉTHODE 5** p. 310

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 + 2t \\ z = -5 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et le plan (\mathcal{P}) d'équation cartésienne :

$$-2x - 3y + z - 6 = 0.$$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de (\mathcal{P}) .

53 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite

$$(d) : \begin{cases} x = -1 - 2s \\ y = 2 - s \\ z = -3 + 5s \end{cases}, s \in \mathbb{R}$$

et le plan

$$(\mathcal{P}) : -x - 5y - z - 6 = 0.$$

56 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) engendrée par $A(6; -2; -3)$ et $\vec{u} = 5\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$ et le plan $(\mathcal{P}) : -5x - 7y + 10z + 6 = 0$.

57 Même raisonnement qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(-5; 4; -3)$ et $B(1; -2; 3)$ et le plan $(\mathcal{P}) : x + y + 3z - 1 = 0$.

Méthode n°6 - Déterminer, si elle existe, l'intersection de deux plans (Ex 66 page 319)

Soient (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) deux plans de vecteurs normaux respectifs \vec{n}_1 et \vec{n}_2 .

1. Tester le parallélisme de (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) en testant la colinéarité de \vec{n}_1 et \vec{n}_2 .
2. Si les plans ne sont pas parallèles :
 - (a) écrire le système composé des équations décrivant (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) ;
 - (b) choisir une des coordonnées comme paramètre ;
 - (c) en déduire une représentation paramétrique de la droite d'intersection.

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations respectives

$$x + 2y + z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2x - 3y - z + 2 = 0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) .

Exercice d'application

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations respectives

$$x + 2y + z - 1 = 0 \text{ et } 2x - 3y - z + 2 = 0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) .

Correction

(\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ils ne sont pas colinéaires donc (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) se coupent selon une droite (d) .

Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x ; y ; z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - 3y - z + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x + 1 \\ z = 1 - x - 2y = -7x - 1 \end{cases}$$

Ainsi, les coordonnées de M sont de la forme $(x ; 3x + 1 ; -7x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$ et donc, en choisissant x comme paramètre, on obtient une représentation paramétrique de (d) :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \\ z = -1 - 7t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice d'application

Même consigne avec les plans (\mathcal{P}_1) et (\mathcal{P}_2) d'équations respectives $2x - 4y + 3z - 5 = 0$ et $-4x + 8y - 6z + 10 = 0$.

Correction

En reprenant les mêmes notations, $n_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $n_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -6 \end{pmatrix}$ sont colinéaires donc les plans sont parallèles.

Comme les deux équations sont équivalentes, on en déduit que $(\mathcal{P}_1) = (\mathcal{P}_2)$.