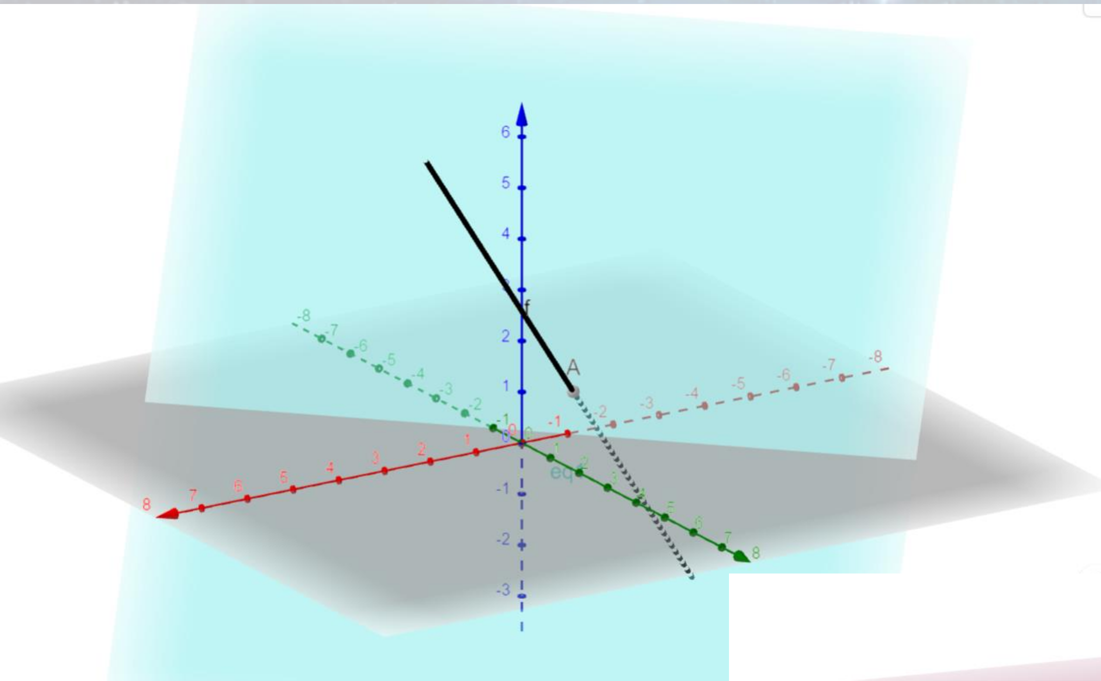
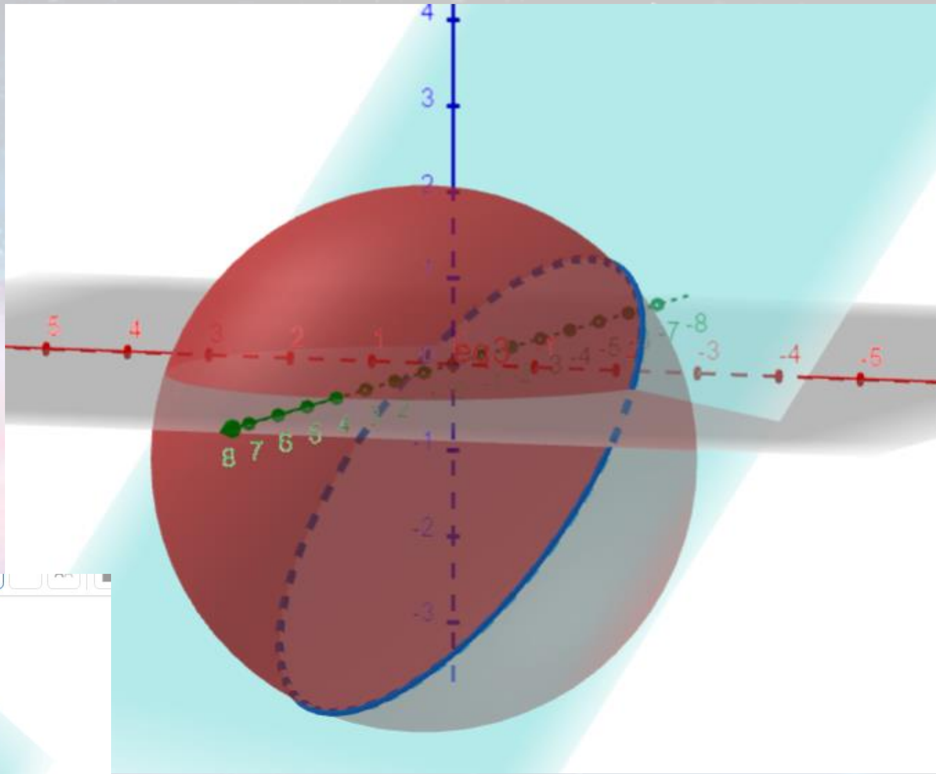
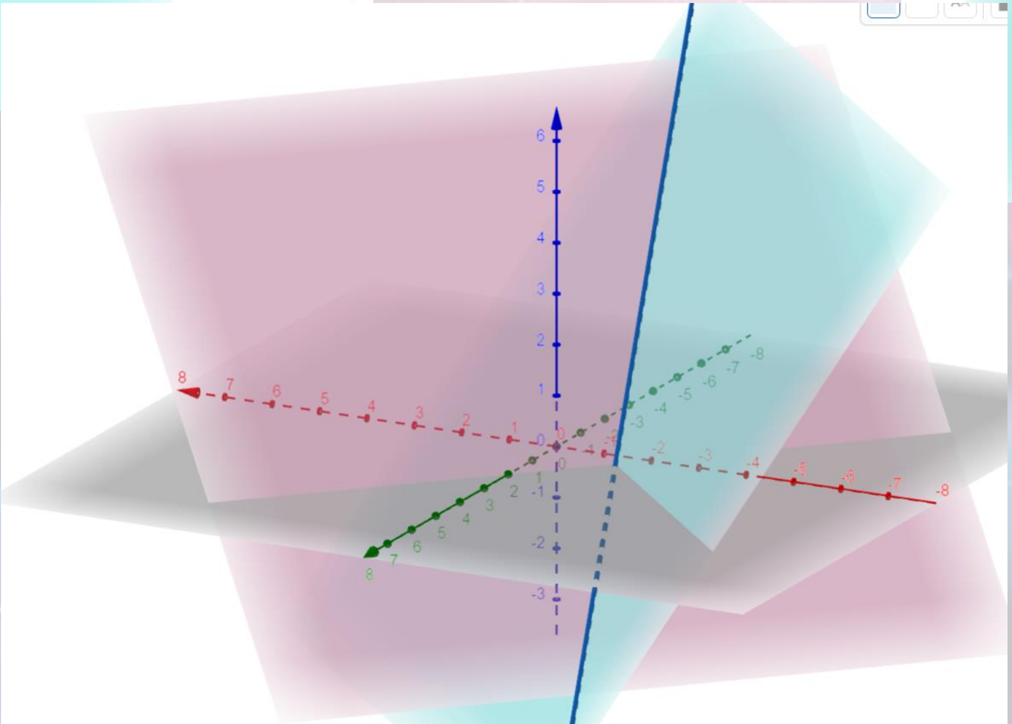
Terminale S3 - Séance Visio du vendredi 17 avril



Intersection droite et plan



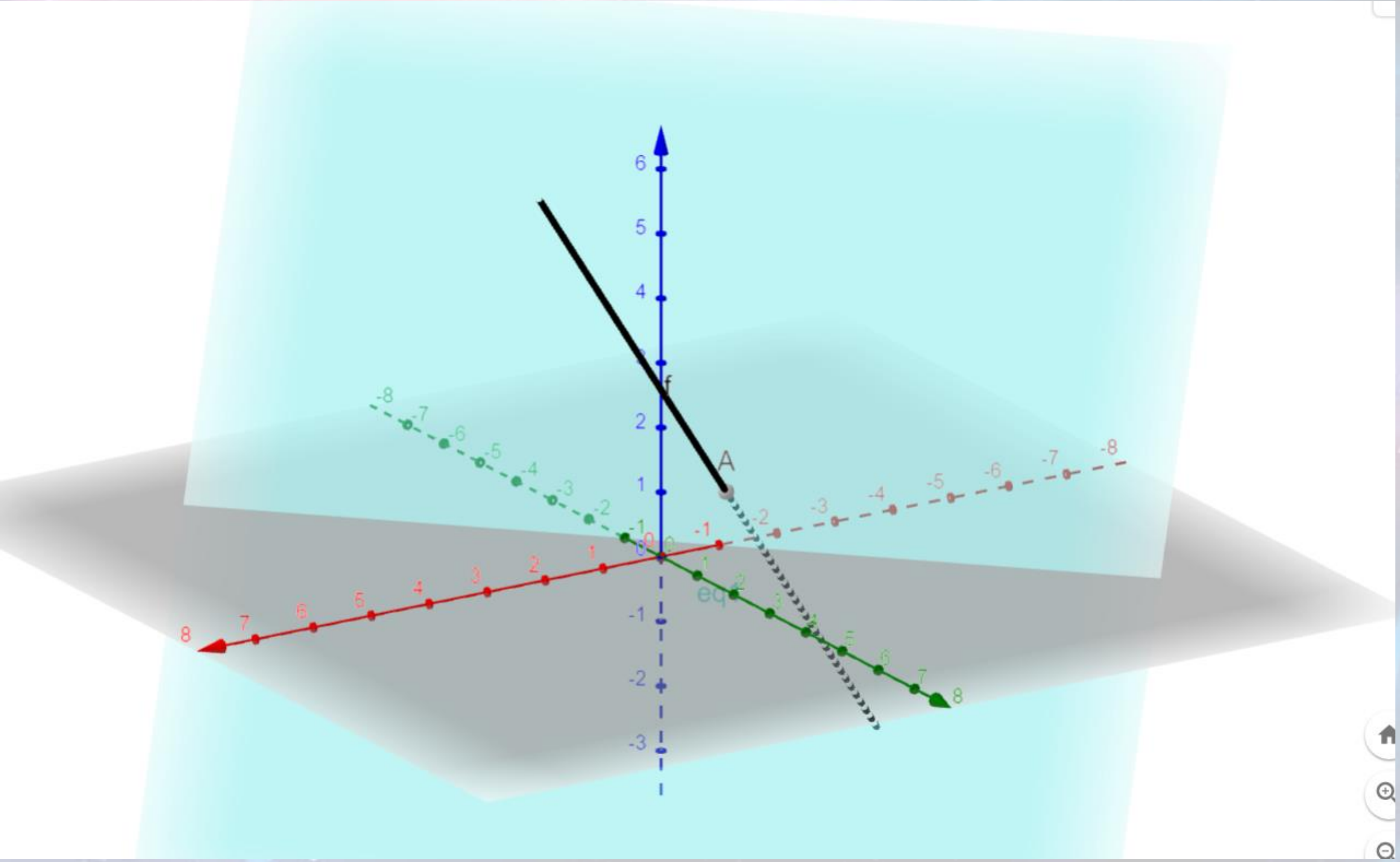
Intersection spère et plan



Intersection 2 plans

Exercices Sésamath page 316

Intersection d’une droite et d’un plan



Exercices Sésamath page 316

41 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, déterminer une équation cartésienne du plan $(\mathscr{Q})$, parallèle au plan $(\mathscr{P})$ et passant par le point A lorsque :

1) $(\mathscr{P}) : x+y+z-1=0$ et $A(1\,;1\,;1)$;

2) $(\mathscr{P}) : x-3y+2z-4=0$ et $A(3\,;0\,;-1)$;

3) $(\mathscr{P}) : \dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{6}y-z-2=0$ et $A\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{1}{6}\right)$;

4) $(\mathscr{P}) : \sqrt{5}x-2y-\sqrt{2}z-4=0$ et $A(1\,;1\,;-1)$.

Correction

$(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{Q})$ étant parallèles, ils ont le même vecteur normal.

1. Un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $(\mathscr{Q}) : x+y+z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$.
   $A\in(\mathscr{Q}) \iff 1+1+1+d=0 \iff d=-3$.
   Ainsi, $(\mathscr{Q}) : x+y+z-3=0$.
2. $(\mathscr{Q}) : x-3y+2z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$.
   $A\in(\mathscr{Q}) \iff 3+2+d=0 \iff d=-5$.
   Ainsi, $(\mathscr{Q}) : x-3y+2z-5=0$.
3. $(\mathscr{Q}) : \dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{6}y-z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$.
   $A\in(\mathscr{Q}) \iff \dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}+d=0 \iff d=\dfrac{1}{6}$.
   Ainsi, $(\mathscr{Q}) : \dfrac{1}{3}x-\dfrac{5}{6}y-z-\dfrac{1}{6}=0$.
4. $(\mathscr{Q}) : \sqrt{5}x-2y-\sqrt{2}z+d=0$, $d\in\mathbb{R}$.
   $A\in(\mathscr{Q}) \iff \sqrt{5}-2+\sqrt{2}+d=0 \iff d=2-\sqrt{5}-\sqrt{2}$.
   Ainsi, $(\mathscr{Q}) : \sqrt{5}x-2y-\sqrt{2}z+2-\sqrt{5}-\sqrt{2}=0$.

Exercices Sésamath page 316

42 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, décrire, dans chacun des cas suivants, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ tels que :

1) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0$ avec $A(1\,;-2\,;3)$ et $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$;
2) $\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}=3$;
3) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{j}=-1$ avec $A(1\,;-2\,;3)$;
4) $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=5$ avec $A(-2\,;4\,;1)$ et $\vec{n}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$.

Correction

1.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=0 &\iff 2(x-1)-3(y+2)+2(z-3)=0\\ &\iff 2x-3y+2z-14=0\end{aligned}$$

L'ensemble de points recherché est donc le plan d'équation $2x-3y+2z-14=0$

2.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM}\cdot\vec{i}=3 &\iff x=3\\ &\iff x-3=0\end{aligned}$$

L'ensemble de points recherché est donc le plan d'équation $x-3=0$.

3.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{j}=-1 &\iff y+2=-1\\ &\iff y+3=0\end{aligned}$$

L'ensemble de points recherché est donc le plan d'équation $y+3=0$.

4.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n}=5 &\iff -(x+2)+2(y-4)+5(z-1)=5\\ &\iff -x+2y+5z-20=0\end{aligned}$$

L'ensemble de points recherché est donc le plan d'équation $-x+2y+5z-20$.

Exercices Sésamath page 316

52 ► MÉTHODE 5 p. 310

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace soit (d) la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -7+t \\ y = 4+2t \\ z = -5-t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et le plan $(\mathscr{P})$ d'équation cartésienne :

$$-2x-3y+z-6=0.$$

Déterminer, s'il existe, les coordonnées du point d'intersection de (d) et de $(\mathscr{P})$.

52 (d) est dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et un vecteur normal à $(\mathscr{P})$ est $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-3\\1\end{pmatrix}$. $\vec{u}\cdot\vec{n}=-9$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point $P(x;y;z)$ tel que :

$$\begin{cases} x = -7+t \\ y = 4+2t \\ z = -5-t \\ 0 = -2x-3y+z-6 \end{cases}$$

$$Donc \quad -2(-7+t)-3(4+2t)+(-5-t)-6=0$$
$$\Leftrightarrow \quad -9-9t=0 \quad \Leftrightarrow \quad t=-1$$

Ainsi, $t=-1$ et donc $x=-8$, $y=2$ et $z=-4$. Le point d'intersection a pour coordonnées $(-8;2;-4)$.

Exercices Sésamath page 316

53 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite

$$(d) : \begin{cases} x = -1-2s \\ y = 2-s \\ z = -3+5s \end{cases}, \ s \in \mathbb{R}$$

et le plan

$$(\mathscr{P}) : -x-5y-z-6=0.$$

Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-1\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\-5\\-1\end{pmatrix}$. Ainsi $\vec{u}\cdot\vec{n} = 2 \neq 0$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en un point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = -1-2s \\ y = 2-s \\ z = -3+5s \\ -x-5y-z-6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1-2s \\ y = 2-s \\ z = -3+5s \\ 1+2s-10+5s+3-5s-6 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = -13 \\ y = -4 \\ z = 27 \\ s = 6 \end{cases}$$

Ainsi, $M(-13\,;-4\,;27)$.

Exercices Sésamath page 316

56 Même consigne qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) engendrée par $A(6\,;-2\,;-3)$ et $\vec{u} = 5\vec{i} - 3\vec{j} - 6\vec{k}$ et le plan $(\mathscr{P})$: $-5x - 7y + 10z + 6 = 0$.

Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ sont respectivement $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\\-6\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\-7\\10\end{pmatrix}$. Ainsi $\vec{u}\cdot\vec{n} = -64 \neq 0$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en point M dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ satisfont le système :

$$\begin{cases} x = 6+5t \\ y = -2-3t \\ z = -3-6t \\ -5x-7y+10z+6 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 6+5t \\ y = -2-3t \\ z = -3-6t \\ -30-25t+14+21t-30-60t+6 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{23}{8} \\ y = -\dfrac{1}{8} \\ z = \dfrac{3}{4} \\ t = -\dfrac{5}{8} \end{cases}$$

Ainsi, $M\left(\dfrac{23}{8}\,;-\dfrac{1}{8}\,;\dfrac{3}{4}\right)$.

Exercices Sésamath page 316

57 Même raisonnement qu'à l'exercice **52** avec la droite (d) passant par les points $A(-5;4;-3)$ et $B(1;-2;3)$ et le plan $(\mathscr{P}) : x+y+3z-1=0$.

Correction

Un vecteur directeur de (d) et un vecteur normal de $(\mathscr{P})$ sont respectivement $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\-6\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$. Ainsi $\overrightarrow{AB}\cdot\vec{n} = 18 \neq 0$ donc (d) et $(\mathscr{P})$ se coupent en point M dont les coordonnées $(x;y;z)$ satisfont le système :

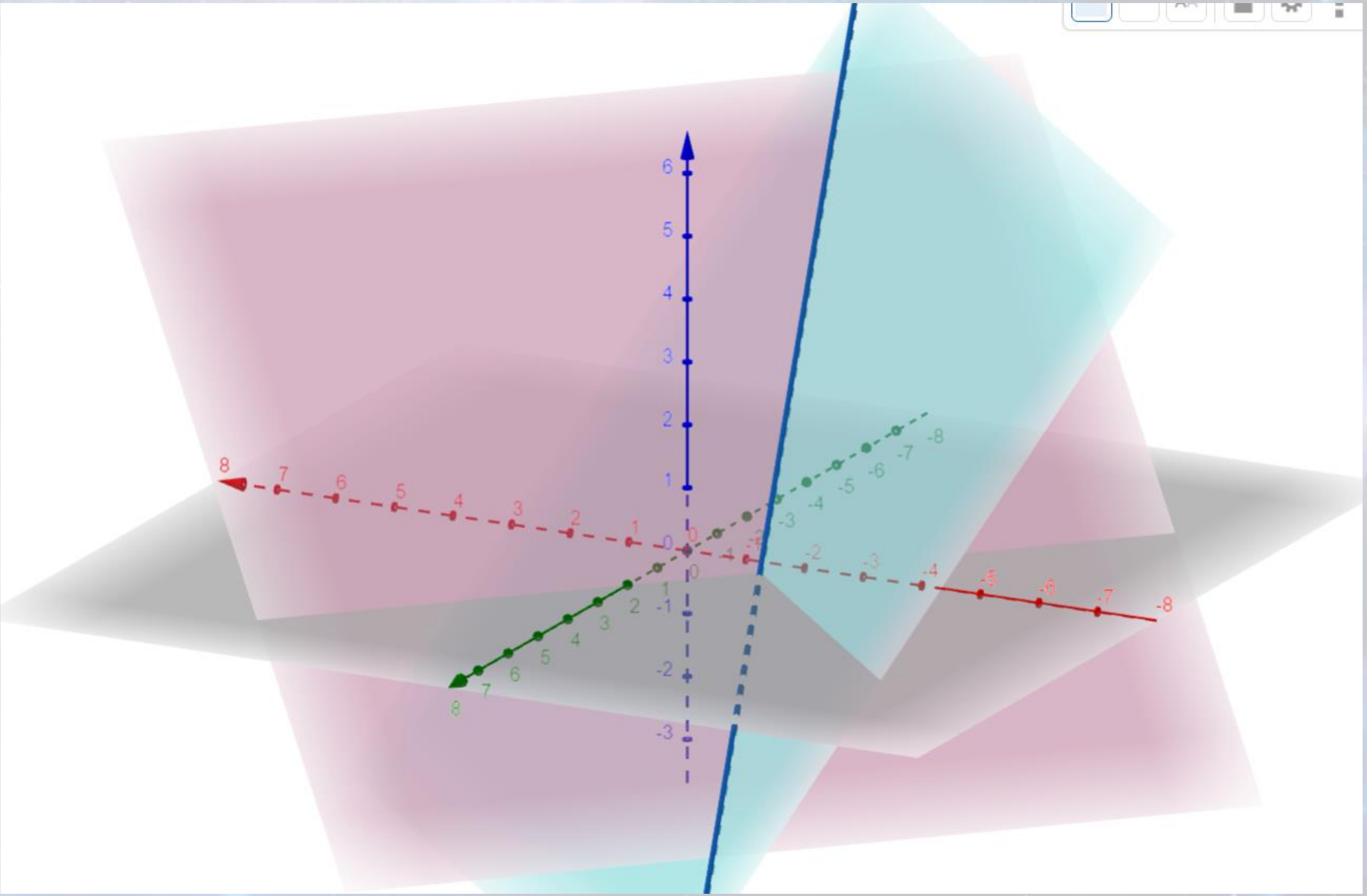
$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5+t \\ y & = & 4-t \\ z & = & -3+t \\ x+y+3z-1 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5+t \\ y & = & 4-t \\ z & = & -3+t \\ -5+t+4-t-9+3t-1 & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{4}{3} \\ y & = & \dfrac{1}{3} \\ z & = & \dfrac{2}{3} \\ t & = & \dfrac{11}{3} \end{array}\right.$$

Ainsi, $M\left(-\dfrac{4}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

Exercices Sésamath page 319

Intersection de deux plans



66 ► MÉTHODE 6 p. 311

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x + y + 2z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad -x + 4y - 5z + 6 = 0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

67 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y - 2z + 4 = 0.$$

68 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - y - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad -2x + 2y + 4z + 4 = 0.$$

69 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$3x + 9y - 6z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

66 ► MÉTHODE 6 p. 311

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$, on considère les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations cartésiennes respectives :

$$x+y+2z-3=0 \quad \text{et} \quad -x+4y-5z+6=0.$$

Déterminer, si elle existe, une représentation paramétrique de la droite d'intersection entre $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$.

Corrigé

66 $\vec{n}_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2\begin{pmatrix}-1\\4\\-5\end{pmatrix}$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ se coupent selon une droite (d). On résout :

$$\begin{cases} x+y+2z-3 &= 0\\ -x+4y-5z+6 &= 0\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+2z-3 &= 0\\ 5y-3z+3 &= 0\end{cases}$$

Ainsi, $z=1+\dfrac{5}{3}y$ et $x=1-\dfrac{13}{3}y$ et donc (d) :

$$\begin{cases} x &= 1-\dfrac{13}{3}t\\ y &= t \qquad\qquad , \; t\in\mathbb{R}.\\ z &= 1+\dfrac{5}{3}t\end{cases}$$

67 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$x - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad y - 2z + 4 = 0.$$

Correction

$(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui ne sont pas colinéaires donc les plans se coupent selon une droite (d).

Un point M appartient à (d) si et seulement si ses coordonnées $(x\,;y\,;z)$ vérifient le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x - 2z - 1 & = & 0 \\ y - 2z + 4 & = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2z \\ y & = & -4 + 2z \end{array}\right.$$

Ainsi, les coordonnées de M sont de la forme $(1 + 2z\,; -4 + 2z\,; z)$, $z \in \mathbb{R}$ et donc, en choisissant z comme paramètre, on obtient la représentation paramétrique suivante de (d) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 + 2t \\ y & = & -4 + 2t \\ z & = & t \end{array}\right., \ t \in \mathbb{R}.$$

69 Même consigne qu'à l'exercice **66** avec les plans $(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ d'équations respectives :

$$3x + 9y - 6z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad x + 3y - 2z - 1 = 0.$$

Correction

$(\mathscr{P}_1)$ et $(\mathscr{P}_2)$ ont pour vecteurs normaux respectifs $\vec{n}_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ qui sont colinéaires donc les plans sont parallèles.

Les équations des deux plans étant équivalentes, on en déduit que $(\mathscr{P}_1) = (\mathscr{P}_2)$ (ce que l'on aurait néanmoins pu dire dès le départ).

Exercices Sésamath page 324

Intersection d'une sphère et d'une droite

85 Intersection d'une sphère et d'une droite INFO

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1 ; -2 ; 2)$, $B(1 ; -5 ; 4)$ et $C(-1 ; 3 ; -1)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, s'ils existent, les points d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ de centre A et de rayon 3 avec la droite (BC).

1) a) Représenter $\mathscr{S}$ ainsi que (BC) avec un logiciel de géométrie.

b) Construire leur intersection.

2) a) En procédant de la même façon que pour le cercle en classe de Première S, déterminer une équation de $\mathscr{S}$.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

3) Résoudre le système composé des équations de $\mathscr{S}$ et de (BC) et en déduire la réponse au problème posé.

85 **Intersection d'une sphère et d'une droite** INFO

On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$. On considère les points $A(1\,;-2\,;2)$, $B(1\,;-5\,;4)$ et $C(-1\,;3\,;-1)$.

Le but de l'exercice est de déterminer, s'ils existent, les points d'intersection de la sphère $\mathscr{S}$ de centre A et de rayon 3 avec la droite (BC).

1) a) Représenter $\mathscr{S}$ ainsi que (BC) avec un logiciel de géométrie.

b) Construire leur intersection.

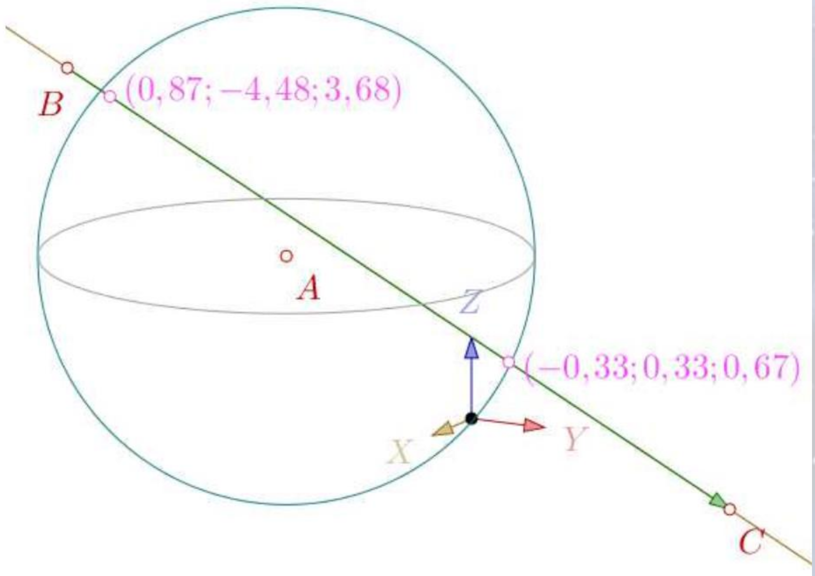
2) a) En procédant de la même façon que pour le cercle en classe de Première S, déterminer une équation de $\mathscr{S}$.

b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).

3) Résoudre le système composé des équations de $\mathscr{S}$ et de (BC) et en déduire la réponse au problème posé.

Correction

1.



2. (a)

$$\begin{aligned} M(x\,;y\,;z)\in\mathscr{S} &\iff AM=3\\ &\iff AM^2=9\\ &\iff (x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9 \end{aligned}$$

Une équation de $\mathscr{S}$ est donc $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-2)^2=9$.

(b) Une équation de (BC) est :

$$\begin{cases} x = 1-2t\\ y = -5+8t\\ z = 4-5t \end{cases},\ t\in\mathbb{R}.$$

3. On procède en substituant x, y et z dans l'équation de $\mathscr{S}$ afin d'obtenir l'équation $93t^2-68t+4=0$ donc les solutions sont $t_1=\dfrac{2}{31}$ et $t_2=\dfrac{2}{3}$.

Ainsi, on trouve pour x, y et z, qui sont les coordonnées des points d'intersection entre $\mathscr{S}$ et (BC) :

- soit $x=\dfrac{27}{31}$, $y=-\dfrac{139}{31}$ et $z=\dfrac{114}{31}$;
- soit $x=-\dfrac{1}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$ et $z=\dfrac{2}{3}$.

Exercices Sésamath page 324

Intersection d'une sphère et d'un plan

86 **Intersection d'une sphère et d'un plan** **INFO**

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k}\,)$ de l'espace, soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A(1\,;-2\,;3)$ et de rayon $\sqrt{10}$.

On considère aussi le plan $(\mathscr{P})$ passant par O et dirigé par $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

1) a) Représenter $\mathscr{S}$ ainsi que de $(\mathscr{P})$ dans un logiciel de géométrie.

b) Construire leur intersection. Quelle semble être la nature de cette intersection ?

2) a) Déterminer des équations de $\mathscr{S}$ et de $(\mathscr{P})$.

b) Résoudre le système composé des équations de $\mathscr{S}$ et de $(\mathscr{P})$ et retrouver le résultat conjecturé à la question 1)b).

86 **Intersection d'une sphère et d'un plan** **INFO**

Dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de l'espace, soit $\mathscr{S}$ la sphère de centre $A(1\,;-2\,;3)$ et de rayon $\sqrt{10}$. On considère aussi le plan $(\mathscr{P})$ passant par O et dirigé par $\vec{j}$ et $\vec{k}$.

1) a) Représenter $\mathscr{S}$ ainsi que de $(\mathscr{P})$ dans un logiciel de géométrie.

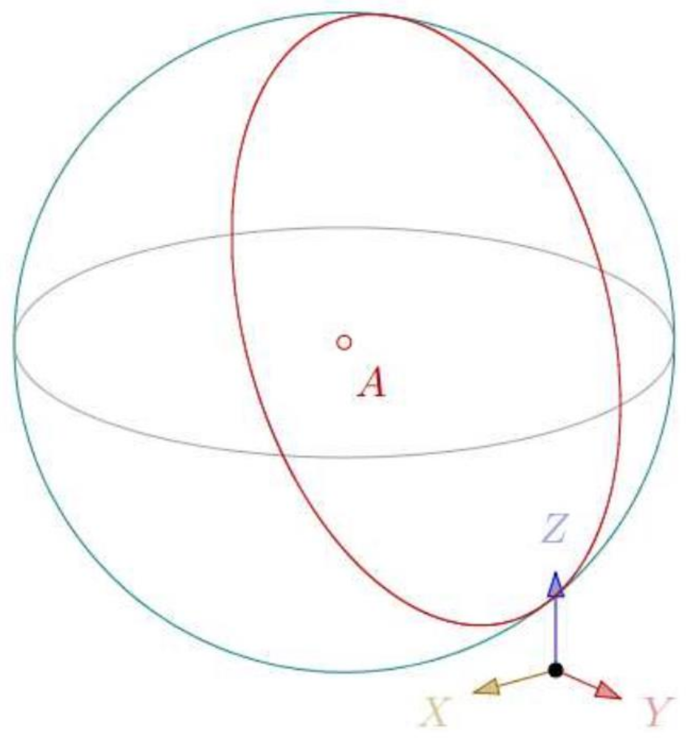
b) Construire leur intersection. Quelle semble être la nature de cette intersection ?

2) a) Déterminer des équations de $\mathscr{S}$ et de $(\mathscr{P})$.

b) Résoudre le système composé des équations de $\mathscr{S}$ et de $(\mathscr{P})$ et retrouver le résultat conjecturé à la question **1)b)**.

Correction

1.



Il semblerait que l'intersection soit un cercle.

2. **(a)** Une équation de $\mathscr{S}$ est $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=10$.
Une équation du plan engendré par O, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ est $x=0$.

(b) La résolution du système donne :

$$1+(y+2)^2+(z-3)^2=10 \iff (y+2)^2+(z-3)^2=9.$$

Il s'agit donc, dans le plan d'équation $x=0$, du cercle de centre $\Omega(-2\,;3)$ et de rayon $r=3$.