Géométrie dans l'espace – Annales 2018

Pondichéry 4 mai 2018 **(5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2 ; 1 ; 4), $(4;-1;0)$, $(0;3;2)$ et $(4;3;-2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

2. Soit M un point de la droite (CD).

- ***(a)*** Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.
- ***(b)*** On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3;3;-1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.
- ***(c)*** Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm ^{2}.

3.

- ***(a)*** Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).
- ***(b)*** Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).
- ***(c)*** Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).
- ***(d)*** Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{8}{3}\right)$.

4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Amérique du Nord 29 mai 2018

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.

On considère les points B$(10;-8;2)$, C$(-1;-8;5)$ et D(14 ; 4 ; 8).

1. (a) Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).
(b) Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.
(a) Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.
(b) Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

Centres étrangers 11 juin 2018

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{\mathrm{AJ}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$;
- K est le milieu du segment [FG].

Partie A

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.

2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).

Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $(\mathrm{A}; \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}, \overrightarrow{\mathrm{AE}})$.

1. (a) Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.
(b) Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\overrightarrow{n}(4; a; b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$.
(c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.

2. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).
(b) Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).
(c) Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).