Nombres premiers – Bac 2019

Centres étrangers–Pondichéry Juin 2019

Le but de cet exercice est d'envisager plusieurs décompositions arithmétiques du nombre 40.

Partie A :

Les questions 1., 2. *et* 3. *sont indépendantes*

1. On a $40 = 17 + 23$, somme de deux nombres premiers. (On a aussi $40 = 3 + 37 = 11 + 29$.)
2. On considère l'équation $20x + 19y = 40$, où x et y désignent deux, entiers relatifs.
   On a : $20 \times (-17) + 19 \times 20 = 40$.
   L'équation s'écrit : $20x + 19y = 20 \times (-17) + 19 \times 20 \Leftrightarrow 20(17 + x) = 19(20 - y)$.
   20 divise $20(17 - x)$; 19 et 20 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 20 divise $20 - y$ donc $20 - y = 20n$, $n \in \mathbb{Z}$, donc $y = 20 - 20n$.
   Alors $20(17 + x) = 19 \times 20n$, d'où $17 + x = 19n$ donc $x = 19n - 17$, $n \in \mathbb{Z}$.
   Réciproquement avec k entier relatif on a
   $20(19k - 17) + 19(20 - 20k) = 380k - 340 + 380 - 380k = 40$.
   Conclusion : $\boxed{\mathscr{S} = \{(19n - 17\,;\, 20 - 20n),\, n \in \mathbb{Z}\}}$.
3. Le nombre 40 est une somme de deux carrés puisque : $40 = 2^2 + 6^2$. On veut savoir si 40, est aussi différence de deux carrés, autrement dit s'intéresser à l'équation $x^2 - y^2 = 40$, où x et y désignent deux entiers naturels.
   (a) $\boxed{40 = 2^3 \times 5}$. (décomposition en produit de facteurs premiers)
   (b) $x + y = (x - y) + 2y$ donc si $x - y$ est pair, $x + y$ aussi et si $x - y$ est impair, $2y$ est pair donc $x + y$ est impair.
   Dans tous les cas $x + y$ et $x - y$ ont la même parité.
   (c) $x^2 - y^2 = 40 \Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 2^3 \times 5$.
   On doit avoir $\begin{cases} x - y = 2^3 \\ x + y = 5 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x - y = 5 \\ x + y = 2^3 \end{cases}$.
   D'après la question précédente, il n'y a aucune solutions, puisque 2^3 est pair et 5 est impair.

Partie B : « sommes » de cubes

Les questions 1. *et* 2. *sont indépendantes.*

Certains nombres entiers peuvent se décomposer en somme ou différence de cubes d'entiers naturels. Par exemple :

$$13 = 4^3 + 7^3 + 7^3 - 9^3 - 2^3$$

$$13 = -1^3 - 1^3 - 1^3 + 2^3 + 2^3$$

$$13 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3$$

Dans tout ce qui suit, on écrira pour simplifier « sommes » de cubes à la place de « sommes ou différence de cubes d'entiers naturels ».

Les deux premiers exemples montrent que 13 peut se décomposer en « somme » de 5 cubes. Le troisième exemple montre que 13 peut se décomposer en « somme » de 4 cubes.

1. (a) $40 = 13 + 27$ donc $\boxed{40 = 1^3 + 7^3 + 10^3 - 11^3 + 3^3}$.
   (b) On admet que pour tout entier naturel n on a :

$$6n = (n + 1)^3 + (n - 1)^3 - n^3 - n^3$$

   On a $48 = 6 \times 8 = 6n$ avec $n = 8$, donc $\boxed{48 = 9^3 + 7^3 - 8^3 - 8^3}$

2. Le nombre 40 est une « somme » de 4 cubes : $40 = 4^3 - 2^3 - 2^3 - 2^3$.
On veut savoir si 40 peut être décomposé en « somme »de 3 cubes.
(a) Recopier et compléter sans justifier :

Reste de la division euclidienne de n par 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Reste de la division euclidienne de n^3 par 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

(b) On déduit du tableau précédent que, pour tout entier naturel n, l'entier naturel n^3 est congru modulo 9 soit à 0, soit à 1, soit à -1.
$40 \equiv 4\ [9]$; 4 ne peut pas être obtenu comme somme de trois nombres égaux soit à 1, à 0 ou -1, donc 40 ne peut être la somme de trois cubes.

Nouvelle Calédonie - Novembre 2019

On considère la suite (a_n) définie pour tout entier naturel n par

$$a_n = \frac{4^{2n+1}+1}{5}.$$

1. • $a_2 = \dfrac{4^{4+1}+1}{5} = \dfrac{4^5+1}{5} = \dfrac{1025}{5} = 205$;
• $a_3 = \dfrac{4^{6+1}+1}{5} = \dfrac{4^7+1}{5} = \dfrac{16384+1}{5} = 3277$

2. Pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = \dfrac{4^{2(n+1)+1}+1}{5} = \dfrac{4^{2n+3}+1}{5} = \dfrac{4^{(2n+1)+2}+1}{5} = \dfrac{4^{2n+1}\times 4^2+1}{5} = \dfrac{4^{2n+1}\times 4^2+16-15}{5} = \dfrac{4^{2n+1}\times 4^2+16-15}{5} = \dfrac{16\times 4^{2n+1}+16-15}{5} = 16\dfrac{4^{2n+1}+1}{5} - \dfrac{15}{5} =$
$16a_n - 3$.

3. • Par récurrence :
– $a_0 = 1$: la propriété est vraie au rang zéro ;
– Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{N}$; alors $16a_n \in \mathbb{N}$ et d'après le résultat précédent

$16a_n - 3 = a_{n+1} \in \mathbb{N}$.
La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie à un rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $a_n \in \mathbb{N}$ pour tout naturel.
• Les puissances paires de 4 se terminent par 6 et les puissances impaires par 4, donc quel que soit $n \in \mathbb{N}$, 4^{2n+1} se termine par 4 et donc $4^{2n+1}+1$ se termine par 5 et est donc multiple de 5 : a_n est donc un naturel pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Dans cette question on utilise l'égalité de la question **2.** afin de démontrer plusieurs propriétés des termes de la suite (a_n).

a. Tout diviseur commun à a_n et à a_{n+1} et un diviseur commun à $16a_n$ et à a_{n+1}, donc est un diviseur de la différence $16a_n - a_{n+1} = 3$. Or 3 a deux diviseurs 1 et 3.
Conclusion : tout diviseur commun à a_n et à a_{n+1} et en particulier le plus grand est un diviseur de 3, donc est 1 ou 3.

b. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, on a $16 \equiv 1\ [3]$ et $-3 \equiv 0\ [3]$, donc $16a_n \equiv a_n\ [3]$ donc finalement $16a_n - 3 = a_{n+1} \equiv a_n [3]$.

c. On a $a_0 = 1$ et on a bien $1 \equiv 1\,[3]$.

Initialisation : le résultat précédent signifie que a_0 n'est pas divisible par 3.

Hérédité : supposons que a_n n'est pas divisible par 3 pour $n \in \mathbb{N}$; alors $16a_n$ n'est pas divisible par 3 (puisque 16 ne l'est pas) et comme 3 est divisible 3, $16a_n - 3 = a_{n+1}$ n'est pas divisible par 3.

La propriété est vraie au rang zéro, et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$, elle l'est aussi au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence a_n n'est pas un multiple de 3 pour $n \in \mathbb{N}$.

d. On a vu à la question **4. a.** que le plus grand commun diviseur d_n à a_n et à a_{n+1} était 1 ou 3. Comme on vient de voir que ce n'est pas 3, c'est donc 1 : les naturels a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Remarque : cette égalité n'est pas difficile à démontrer puisqu'elle relève de l'identité $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.

$b_n c_n = \left(2^{n+1}\left(2^n - 1\right) + 1\right)\left(2^{n+1}\left(2^n + 1\right) + 1\right) = \left(2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1\right)\left(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1\right) =$
$\left(2^{2n+1} + 1 - 2^{n+1}\right)\left(2^{2n+1} + 1 + 2^{n+1}\right) = \left(2^{2n+1} + 1\right)^2 - \left(2^{n+1}\right)^2 = 2^{4n+2} + 2 \times 2^{2n+1} + 1 - 2^{2n+2} =$
$\left(2^2\right)^{2n+1} + 2^{2n+2} - 2^{2n+2} + 1 = 4^{2n+1} + 1 = 5a_n$.

5. **a.** On a donc pour $n \geqslant 2, \quad 5a_n = b_n c_n$. De deux choses l'une :

- ou 5 ne divise pas b_n ; comme 5 est premier et donc premier avec b_n, 5 divise le produit $b_n c_n$ et est premiers avec b_n : d'après le théorème de Gausse 5 divise c_n ;
- ou 5 divise b_n et alors le résultat est acquis.

b. $b_n = 2^{n+1}\left(2^n - 1\right) + 1$, donc $n \geqslant 2 \Rightarrow 2^n \geqslant 2^2 \Rightarrow 2^n - 1 \geqslant 3$; d'autre part $n \geqslant 2 \Rightarrow n+1 \geqslant 3 \Rightarrow 2^{n+1} \geqslant 2^3$, d'où par produit
$2^{n+1}\left(2^n - 1\right) \geqslant 3 \times 8$ et enfin $b_n \geqslant 25 > 5$.
De mà^ame $c_n = 2^{n+1}\left(2^n + 1\right) + 1$
$n \geqslant 2 \Rightarrow 2^n \geqslant 2^2 \Rightarrow 2^n + 1 \geqslant 5$; d'autre part $n \geqslant 2 \Rightarrow n+1 \geqslant 3 \Rightarrow 2^{n+1} \geqslant 2^3$, d'où par produit
$2^{n+1}\left(2^n - 1\right) \geqslant 5 \times 8$ et enfin $c_n \geqslant 40 > 5$.

c. On a $a_n = \dfrac{b_n c_n}{5}$.

Donc $a_n = \dfrac{b_n}{5} \times c_n$ ou $a_n = \dfrac{c_n}{5} \times b_n$.

D'après les questions précédentes $\dfrac{b_n}{5}$ ou $\dfrac{c_n}{5}$ est un naturel au moins égal à 2 puisque b_n et c_n sont supérieurs à 5 et que l'un au moins est un multiple de 5.
a_n est donc le produit de deux naturels différents de 1 : il n'est donc pas premier.