Terminale S3
Séance Visio du mardi 21 avril

Suites de matrices
Marches aléatoires

Suites de matrices

I. Suites de matrices colonnes

1. Généralités

Définition - Suite de matrices colonnes

Une suite de matrices colonnes de taille $k \geq 2$ est une fonction qui, à tout entier naturel n, associe une matrice colonne de même taille.

Remarque : Cette définition prolonge celle de suite numérique. On peut ainsi rencontrer des suites de matrices définies explicitement ou par récurrence.

Exemple : Soit (U_n) la suite de matrices colonnes $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, ...

Cette suite peut être définie explicitement avec $U_n = \begin{pmatrix} 2n+1 \\ 2^n \end{pmatrix}$ mais aussi par la relation de récurrence

$$U_{n+1} = AU_n + B \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Définion - Convergence, limite d'une suite de matrices colonnes

Une suite de matrices colonnes $(U_n) = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ converge si les suites numériques (a_n) et (b_n) convergent.

Sa limite est alors la matrice colonne formée par les limites de ces deux suites.

Exemple : Soit (U_n) la suite de matrices colonnes de terme général $U_n = \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{n+1} \\ \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}$.

On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right) = 2$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

Remarque : On définit naturellement une suite de matrices colonnes de taille supérieure.

Exercices du livre Sésamath

Exercice 18 page 127

Soit la suite de matrices lignes (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{10} U_n$.

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Déterminer l'expression de U_n en fonction de n.
3. La suite (U_n) converge-t-elle ?

Exercice 19

Soit la suite de matrices colonnes (V_n) de taille 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n + R$ avec :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} et R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer V_1, V_2 et V_3.
2. Déterminer l'expression de V_n en fonction de n.
3. La suite (V_n) converge-t-elle ?

Exercices du livre Sésamath

Exercice 20

Soit les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} & = & \frac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \frac{u_n+2v_n}{3} \end{cases}.$$

Soit la suite de matrices (X_n) définie par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Soit enfin la matrice A définie par $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

2. Soit $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

   (a) Montrer que P et P' sont inversibles.

   (b) Déterminer la matrice diagonale B telle que $P'BP = A$.

   (c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P'B^nP$.

3. (a) Exprimer B^n en fonction de n.

   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

2. Suites définies par $\mathbf{U_{n+1} = AU_n}$ ou $\mathbf{U_{n+1} = AU_n + B}$

Propriété : Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille k définie par $U_{n+1} = AU_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, avec A une matrice carrée d'ordre k.

Alors, le terme général de (U_n) peut s'écrire $U_n = A^n U_0$

Preuve : On démontre par récurrence sur n. Voici l'initialisation et l'hérédité :

- Initialisation : $U_0 = IU_0 = A^0 U_0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
- Hérédité : Si, pour n entier donné, $U_n = A^n U_0$, alors

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= AU_n \\ &= A \times A^n U_0 \\ &= A^{n+1} U_0. \end{aligned}$$

Méthode 1 - Expliciter U_n pour (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + B$

Exercice d'application : Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.
2. Déterminer la matrice C telle que : $C = AC + B$.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - C$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n \times V_0$.
4. En déduire une expression U_n en fonction de n.

Méthode 1 - Expliciter U_n pour (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + B$

Exercice d'application : Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}$.

- Pour $n = 0$, on a $A^0 = I$, donc la proposition est vraie.
- Supposons la proposition vraie pour n donné. Montrons qu'elle l'est encore au rang $n+1$.

$$A^{n+1} = A^n A = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ n2^n + 2^n & (-1)^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 \\ (n+1)2^n & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

- La proposition est initialisée au rang 0 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Déterminer la matrice C telle que : $C = AC + B$.

$C = AC + B \Leftrightarrow (I - A)C = B$.

Or, $\det(I - A) = 1$ donc $I - A$ est inversible.

On a $(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. D'où : $C = (I - A)^{-1}B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - C$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n \times V_0$.
4. En déduire une expression U_n en fonction de n.

Méthode 1 - Expliciter $\mathbf{U_n}$ pour $(\mathbf{U_n})$ définie par $\mathbf{U_{n+1} = AU_n + B}$

Exercice d'application : Soit la suite de matrices colonnes (U_n) définie par $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - C$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = A^n \times V_0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - C = AU_n + B - AC - B = A(U_n - C) = AV_n$.

Or, une suite $(V_n)_{n\geq 0}$ définie par $V_{n+1} = AV_n$ est telle que $V_n = A^n \times V_0$.

4. En déduire une expression U_n en fonction de n.

$$U_n = V_n + C = A^n \times V_0 + C = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ n2^{n-1} & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 4 \\ n2^{n+1} + 6 \end{pmatrix}.$$

Exercices du livre Sésamath

Exercice 23 page 128

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une matrice C telle que $C = AC + B$.
2. On pose $V_n = U_n - C$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

3. Exprimer V_n en fonction de V_0.
4. En déduire que $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.
5.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire une expression de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24

Soit (U_n) une suite de matrices lignes telle que, pour tout enti naturel n, $U_{n+1} = U_n A + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice C telle que $C = CA + B$.
2. On pose $V_n = U_n - C$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = V_n A$.

3. Exprimer V_n en fonction de V_0.
4. En déduire que $U_n = (U_0 - C)A^n + C$.
5.

(a) Calculer A^2, puis A^3. En déduire A^6.

En déduire A^n en fonction du reste de la divisi euclidienne de n par 6.

(b) Déterminer la matrice U_{57}.

Exercices du livre Sésamath

Exercice 25 page 129

Soit les suites réelles (x_n) et (y_n) telles que :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n + 1 \\ y_{n+1} = -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$$

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n + B$.

2. (a) Montrer que $I - A$ est inversible.

Calculer $(I - A)^{-1}$.

(b) Déterminer la matrice X telle que $X = AX + B$.

(c) Étudier la convergence de (x_n) et (y_n).

3. Soit (V_n) la suite de matrices définie par $V_n = X_n - X$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.

4. (a) Justifier que $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible.

(b) On note D la matrice définie par : $D = P^{-1}AP$.

Donner une expression de D^n.

(c) En déduire une expression de A^n.

5. Pour $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$, que peut-on dire de la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?