Exercices du livre Sésamath

Exercice 18 page 127

Soit la suite de matrices lignes (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{1}{10} U_n$.

1. Calculer U_1, U_2 et U_3.
2. Déterminer l'expression de U_n en fonction de n.
3. La suite (U_n) converge-t-elle ?

1. $u_1 = \begin{pmatrix} -10^{-1} & 10^{-1} \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -10^{-2} & 10^{-2} \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} -10^{-3} & 10^{-3} \end{pmatrix}$
2. $u_n = \begin{pmatrix} -10^{-n} & 10^{-n} \end{pmatrix}$
3. Chaque coefficient de la matrice ligne u_n converge vers 0 donc (u_n) converge vers la matrice ligne de taille 1×2 nulle.

Exercices du livre Sésamath

Exercice 19

Soit la suite de matrices colonnes (V_n) de taille 2 telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = V_n + R$ avec :

$$V_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} et R = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer V_1, V_2 et V_3.
2. Déterminer l'expression de V_n en fonction de n.
3. La suite (V_n) converge-t-elle ?

Correction :

1. $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$
2. (v_n) est une suite arithmétique de raison R donc : $v_n = \begin{pmatrix} 2n \\ 1+n \end{pmatrix}$
3. Chaque coefficient de la matrice v_n diverge vers l'infini donc la suite (v_n) ne converge pas.

Exercices du livre Sésamath

Exercice 20

Soit les suites réelles (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} & = & \frac{u_n+v_n}{2} \\ v_{n+1} & = & \frac{u_n+2v_n}{3} \end{cases}.$$

Soit la suite de matrices (X_n) définie par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

Soit enfin la matrice A définie par $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

1. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

$$A \times X_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ \frac{1}{3}u_n + \frac{2}{3}v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= X_{n+1}$$

(b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n X_0$.

(X_n) est donc une suite géométrique de raison A donc $X_n = A^n X_0$

2. Soit $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{6}{5} \\ -\frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$ et $P' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que P et P' sont inversibles.

$\det(P) \neq 0$ et $\det(P') \neq 0$ donc P et P' sont inversibles.

(b) Déterminer la matrice diagonale B telle que $P'BP = A$.

Soit $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

$$P'BP = A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{5}a + \frac{3}{5}b & \frac{3}{5}(a-b) \\ \frac{2}{5}(a-b) & \frac{3}{5}a + \frac{2}{5}b \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = 1, b = \frac{1}{6}$$

Exercices du livre Sésamath

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = P'B^nP$.

Par récurrence (cf exercice 13)

3. (a) Exprimer B^n en fonction de n.

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{6^n} \end{pmatrix}$$

(b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} - \frac{3}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \\ \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$

$$A^n = P'B^nP = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{2 \times 6^{n-1}} & \dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5 \times 6^n} & \dfrac{3}{5} + \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$$

$X_n = A^n X_0$ d'où le résultat cherché

4. En déduire les limites des suites (u_n) et (v_n).

$0 \leq \dfrac{1}{6} \leq 1$ donc (u_n) et (v_n) converge vers $\dfrac{3}{5}$.

Exercices du livre Sésamath

Exercice 23 page 128

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes telle que, pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer une matrice C telle que $C = AC + B$.
2. On pose $V_n = U_n - C$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = AV_n$.

3. Exprimer V_n en fonction de V_0.
4. En déduire que $U_n = A^n(U_0 - C) + C$.
5.

(a) Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 2n \times 3^{n-1} \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

(b) En déduire une expression de U_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24

Soit (U_n) une suite de matrices lignes telle que, pour tout enti naturel n, $U_{n+1} = U_nA + B$ avec :

$$U_0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la matrice C telle que $C = CA + B$.
2. On pose $V_n = U_n - C$.

Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = V_nA$.

3. Exprimer V_n en fonction de V_0.
4. En déduire que $U_n = (U_0 - C)A^n + C$.
5.

(a) Calculer A^2, puis A^3. En déduire A^6.

En déduire A^n en fonction du reste de la divisi euclidienne de n par 6.

(b) Déterminer la matrice U_{57}.

Exercices du livre Sésamath

Exercice 25 page 129

Soit les suites réelles (x_n) et (y_n) telles que :

$$\begin{cases} x_{n+1} &= \quad x_n + \quad y_n + 1 \\ y_{n+1} &= -2x_n + 4y_n + 3 \end{cases}$$

1. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n + B$.

2. (a) Montrer que $I - A$ est inversible.

Calculer $(I - A)^{-1}$.

(b) Déterminer la matrice X telle que $X = AX + B$.

(c) Étudier la convergence de (x_n) et (y_n).

3. Soit (V_n) la suite de matrices définie par $V_n = X_n - X$.

Montrer que, pour tout entier naturel n, $V_n = A^n V_0$.

4. (a) Justifier que $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ est inversible.

(b) On note D la matrice définie par : $D = P^{-1}AP$.

Donner une expression de D^n.

(c) En déduire une expression de A^n.

5. Pour $x_0 = 1$ et $y_0 = 2$, que peut-on dire de la convergence des suites (x_n) et (y_n) ?