Géométrie dans l'espace – Annales 2018

Pondichéry 4 mai 2018 (5 points) Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Dans l'espace muni du repère orthonormé $(0;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives (2 ; 1 ; 4), $(4;-1;0)$, $(0;3;2)$ et $(4;3;-2)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (CD).

$\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (CD), et (CD) passe par $\mathrm{C}(0;3;2)$

on obtient une représentation paramétrique de (CD): $\begin{cases}x=t\\y=3\\z=2-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

2. Soit M un point de la droite (CD).

(a) Déterminer les coordonnées du point M tel que la distance BM soit minimale.

$\mathrm{B}(4;-1;0)$. Soit t le paramètre associé à M alors $\mathrm{M}(t;3;2-t)$.
Alors $\mathrm{BM}^2=(t-4)^2+(4)^2+(2-t)^2=2t^2-12t+36=2(t^2-6t+18)$
BM est minimale quand BM^2 l'est donc quand $t^2-6t+18$ est minimal.
On sait que tout polynôme de la forme at^2+bt+c avec $a>0$ admet un minimum en $t=-\frac{b}{2a}$ ici BM sera donc minimale pour $t=3$ soit pour $\mathrm{M}(3;3;-1)$

(b) On note H le point de la droite (CD) ayant pour coordonnées $(3;3;-1)$. Vérifier que les droites (BH) et (CD) sont perpendiculaires.

$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\begin{pmatrix}-1\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\mathrm{HB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$
On en déduit que (BH) et (CD) sont perpendiculaires

(c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à 12 cm ^{2}.

D'après ce qui précède, on a (BH) est la hauteur issue de B dans BCD.
On a alors $\mathcal{A}_{\mathrm{BCD}}=\frac{1}{2}\times\mathrm{CD}\times\mathrm{BH}=\frac{1}{2}\times\sqrt{32}\times\sqrt{18}=\sqrt{144}=12$ u. a.
L'aire de BCD est donc bien de 12 cm ^{2}

3.

(a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (BCD).

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\begin{pmatrix}-4\\4\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}\begin{pmatrix}4\\0\\-4\end{pmatrix}$ ne sont évidement pas colinéaires donc B, C et D définissent bien un plan.
$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=-8+4+4=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=8+0-8=0$
$\vec{n}$ est donc bien normal au plan (BCD) car orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan

(b) Déterminer une équation cartésienne du plan (BCD).

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ est normal au plan (BCD) donc (BCD): $2x+y+2z+d=0$
$\mathrm{C}(0;3;2)$ appartient à (BCD) donc $2x_{\mathrm{C}}+y_{\mathrm{C}}+2z_{\mathrm{C}}+d=0\Leftrightarrow d=-7$
Finalement (BCD) : $2x+y+2z-7=0$

(c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et orthogonale au plan (BCD).

Δ est orthogonale au plan (BCD) donc elle admet $\vec{n}$ pour vecteur directeur, on a alors

$$\Delta : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 + t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4 + 2t \end{cases}$$

(d) Démontrer que le point I, intersection de la droite Δ et du plan (BCD) a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

I est un point de (BCD) donc $2x_I + y_I + 2z_I - 7 = 0$ de plus $I \in \Delta$ donc il existe un réel t tel que

$$2(2 + 2t) + (1 + t) + 2(4 + 2t) - 7 = 0 \Leftrightarrow 9t = -6 \Leftrightarrow t = -\frac{2}{3}$$

On en déduit $I\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

Remarque: on pouvait aussi simplement vérifier que les coordonnées proposées correspondaient à un point de Δ et à un point de (BCD)

4. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.

Δ est perpendiculaire au plan (BCD) en I et passe par A, on en déduit que AI est la hauteur du tétraèdre ABCD de base BCD. AI=$\sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2} = 2$

$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{1}{3} \times AI \times \mathcal{A}_{BCD} = 8 \text{ cm}^3$

Amérique du Nord 29 mai 2018 (5 points) Commun

On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé dont l'origine est le point A.
On considère les points $B(10; -8; 2)$, $C(-1; -8; 5)$ et D(14 ; 4 ; 8).

1. (a) Déterminer un système d'équations paramétriques de chacune des droites (AB) et (CD).

Comme A est l'origine du repère, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont égales aux coordonnées de B, et donc la droite (AB), passant par A et dirigée par $\overrightarrow{AB}$ admet pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= 10k \\ y &= -8k \\ z &= 2k \end{cases}$ $k \in \mathbb{R}$.

Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(14 - (-1); 4 - (-8); 8 - 5)$ soit $(15; 12; 3)$.

La droite (CD) passant par C et dirigée par $\overrightarrow{CD}$ admet donc pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x &= -1 + 15l \\ y &= -8 + 12l \\ z &= 5 + 3l \end{cases}$ $l \in \mathbb{R}$.

(b) Vérifier que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont clairement non colinéaires (leurs abscisses ont le même signe, mais pas leurs ordonnées), donc les droites ne sont ni parallèles, ni confondues.

Voyons si elles ont un point commun, en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} 10k &= -1 + 15l \\ -8k &= -8 + 12l \\ 2k &= 5 + 3l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(5 + 3l) &= -1 + 15l \\ -4(5 + 3l) &= -8 + 12l \\ 2k &= 5 + 3l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 25 + 15l &= -1 + 15l \\ -20 - 12l &= -8 + 12l \\ 2k &= 5 + 3l \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25 + 15l &= -1 + 15l \\ -20 - 12l &= -8 + 12l \\ 2k &= 5 + 3l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 26 &= 0 \quad \text{Ohhhh!} \\ -20 - 12l &= -8 + 12l \\ 2k &= 5 + 3l \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, et donc il n'y a aucun point commun aux deux droites, donc elles ne sont pas sécantes.
Finalement, puisque ces droites ne sont ni confondues, ni parallèles, ni sécantes, par élimination on en déduit qu'elles sont effectivement non coplanaires.

2. On considère le point I de la droite (AB) d'abscisse 5 et le point J de la droite (CD) d'abscisse 4.

(a) Déterminer les coordonnées des points I et J et en déduire la distance IJ.

Si I est sur (AB), alors il existe un paramètre k lui correspondant. Puisque son abscisse est 5, cela donne $10k = 5$, soit $k = 0{,}5$. I est donc le point de paramètre $k = 0{,}5$ sur (AB), donc ses coordonnées sont : $(5; -8 \times 0{,}5; 2 \times 0{,}5)$ soit $(5; -4; 1)$.

De façon analogue J est le point de paramètre $l = \frac{1}{3}$ sur (CD), ce qui donne les coordonnées suivantes pour J $(4; -4; 6)$.

Le repère de l'espace étant orthonormé, on a alors : $\mathrm{IJ} = \sqrt{(4-5)^2 + (-4-(-4))^2 + (6-1)^2}$ soit $\mathrm{IJ} = \sqrt{26}$.

(b) Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).
La droite (IJ) est appelée perpendiculaire commune aux droites (AB) et (CD).

Le repère étant orthonormé, on peut utiliser les coordonnées des vecteurs pour calculer un produit scalaire.

$\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ a pour coordonnées $(-1; 0; 5)$ et donc on a :

$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 10 \times (-1) + (-8) \times 0 + 2 \times 5 = -10 + 0 + 10 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux, et donc les droites qu'ils dirigent, (AB) et (IJ) sont orthogonales.

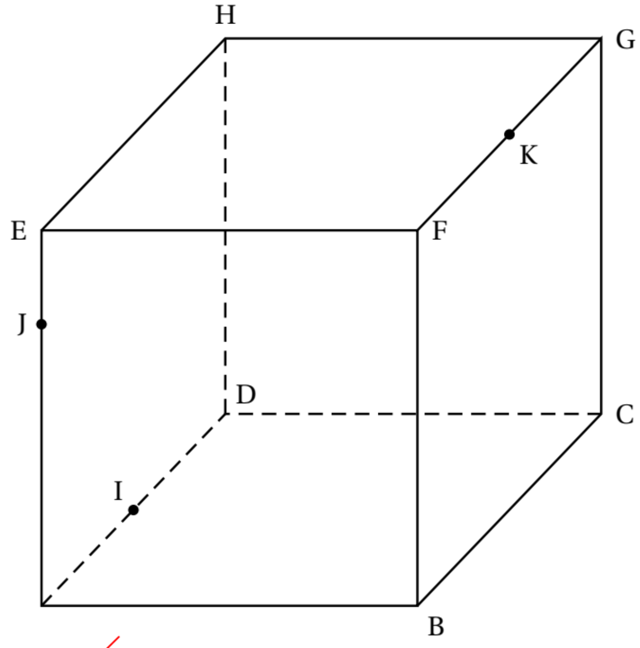
Par définition de I, ces droites ont également I comme point commun, donc elles sont bien perpendiculaires.

De façon analogue : $\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 15 \times (-1) + 12 \times 0 + 3 \times 5 = -15 + 0 + 15 = 0$ (CD) et (IJ) sont donc également orthogonales, avec J comme point commun, par définition de J, et donc elles sont bien perpendiculaires.

Centres étrangers 11 juin 2018 (5 points) Non Spé

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
Les trois points I, J, K sont définis par les conditions suivantes :

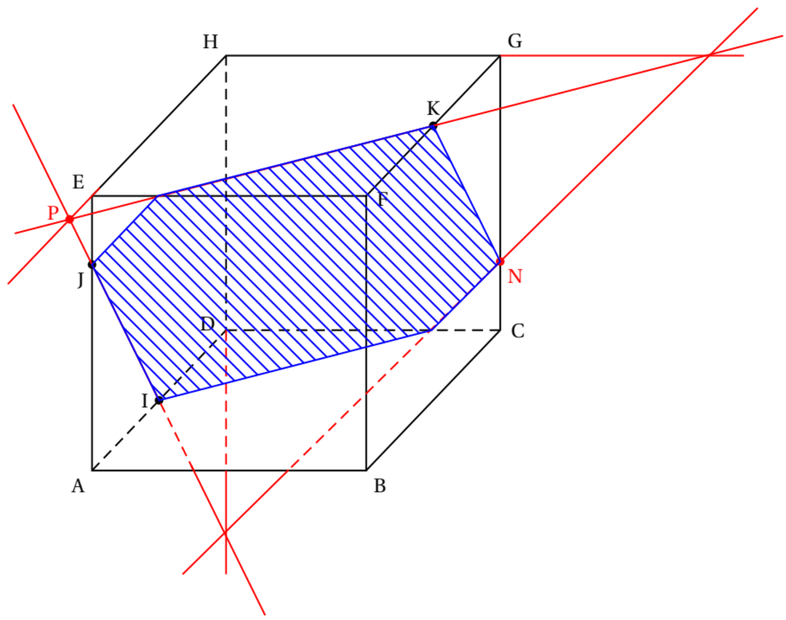
- I est le milieu du segment [AD] ;
- J est tel que $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$;
- K est le milieu du segment [FG].



Partie A

1. Sur la figure donnée en annexe, construire sans justifier le point d'intersection P du plan (IJK) et de la droite (EH). On laissera les traits de construction sur la figure.

2. En déduire, en justifiant, l'intersection du plan (IJK) et du plan (EFG).



Partie B

On se place désormais dans le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. (a) Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.

* Le point I est le milieu de [AD] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

* Le point J est défini par $\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et le vecteur $\overrightarrow{AE}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; donc le point J a pour

coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

* Le point K est le milieu de [FG] donc K a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

(b) Déterminer les réels a et b tels que le vecteur $\overrightarrow{n}(4; a; b)$ soit orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$.

* $\vec{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IJ}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{IJ}} \Leftrightarrow \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IJ}} = 0 \Leftrightarrow 0 - \frac{a}{2} + \frac{3b}{4} = 0 \Leftrightarrow 3b = 2a$$

* $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ si et seulement si leur produit scalaire est nul.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0 \\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{IK}} \Leftrightarrow \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IK}} = 0 \Leftrightarrow 4 + 0 + b = 0 \Leftrightarrow b = -4$$

* $b = -4$ et $3b = 2a$ donc $a = -6$

Donc le vecteur $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$.

(c) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est : $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IK}}$ donc c'est un vecteur normal au plan (IJK). Ce plan (IJK) contient le point I.

Le plan (IJK) est donc l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que les vecteurs $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ soient orthogonaux.

Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{IM}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x-0 \\ y-\frac{1}{2} \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y-\frac{1}{2} \\ z \end{pmatrix}$.

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{\mathrm{IM}} \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{IM}} = 0 \Leftrightarrow 4x - 6\left(y - \frac{1}{2}\right) - 4z = 0 \Leftrightarrow 4x - 6y - 4z + 3 = 0$$

Le plan (IJK) a donc pour équation cartésienne $4x - 6y - 4z + 3 = 0$.

2. (a) Donner une représentation paramétrique de la droite (CG).

La droite (CG) passe par le point C et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ égal au vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La droite (CG) est donc l'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $\overrightarrow{\mathrm{CM}}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{CG}}$, ce qui s'écrit:

$$\overrightarrow{\mathrm{CM}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{CG}} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 & = 0t \\ y-1 & = 0t \\ z-0 & = 1t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = 1 \\ y & = 1 \\ z & = t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

La droite (CG) a donc pour représentation paramétrique $\begin{cases} x & = 1 \\ y & = 1 \\ z & = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$.

(b) Calculer les coordonnées du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG).

Les coordonnées (x, y, z) du point N, intersection du plan (IJK) et de la droite (CG) vérifient le système

$$\begin{cases} x & = 1 \\ y & = 1 \\ z & = t \\ 4x - 6y - 4z + 3 & = 0 \end{cases}$$

La 4 équation donne $4 - 6 - 4t + 3 = 0$ ce qui entraîne que $t = \frac{1}{4}$.

La point N a donc pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

(c) Placer le point N sur la figure et construire en couleur la section du cube par le plan (IJK).