Suites numériques – Variations et limites
Sésamath page 71

116 Étudier les variations des suites suivantes.

a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3n + 1$

b) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{3^n}{2^{n-1}}$

Corrigé

116. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2(n+1)^2 - 3(n+1) + 1 - (2n^2 - 3n + 1) \\ &= 2(n^2 + 2n + 1) - 3n - 3 + 1 - 2n^2 + 3n - 1 \\ &= 2n^2 + 4n + 2 - 3 - 2n^2 \\ &= 4n - 1 \end{aligned}$$

Donc pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante à partir du rang 1.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\dfrac{3^{n+1}}{2^n}}{\dfrac{3^n}{2^{n-1}}} \\ &= \frac{3^{n+1}}{2^n} \times \frac{2^{n-1}}{3^n} \\ &= \frac{3 \times 3^n \times 2^{n-1}}{2^{n-1} \times 2 \times 3^n} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

118 Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{n-3}{2n+1}$.

Étudier les variations de la suite (u_n).

Corrigé

118. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-3}{2(n+1)+1} - \frac{n-3}{2n+1}$$

$$= \frac{n-2}{2n+3} - \frac{n-3}{2n+1}$$

$$= \frac{(n-2)(2n+1) - (n-3)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{2n^2 + n - 4n - 2 - (2n^2 + 3n - 6n - 9)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{2n^2 + n - 4n - 2 - 2n^2 - 3n + 6n + 9}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{7}{(2n+3)(2n+1)}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

121 Soit (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1{,}01^n}{n}$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer, si elle existe, la limite de la suite (u_n).
2. Donner une valeur approchée de $u_{1\,000}$ et $u_{2\,000}$ et $u_{5\,000}$.
3. Les résultats sont-ils cohérents avec la question **1.** ? Conclure.
4. En étudiant le signe de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1$, déterminer le sens de variation de (u_n).

Corrigé

121. 1. On conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. $u_{1\,000} = \dfrac{1{,}01^{1\,000}}{1\,000} \approx 20{,}96$

$u_{2\,000} = \dfrac{1{,}01^{2\,000}}{2\,000} \approx 219643{,}10$

$u_{5\,000} = \dfrac{1{,}01^{5\,000}}{5\,000} \approx 8{,}089 \times 10^{17}$

3. Les résultats ne sont pas cohérents avec la question **1.** On peut penser que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{\dfrac{1{,}01^{n+1}}{n+1}}{\dfrac{1{,}01^n}{n}} - 1$$

$$= \frac{1{,}01^{n+1}}{n+1} \times \frac{n}{1{,}01^n} - 1$$

$$= \frac{1{,}01n}{n+1} - 1$$

122 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = 3n + 2$.

1. Étudier les variations de la suite (u_n).

2. Conjecturer la limite de la suite (u_n).

3. Déterminer le premier entier n tel que $u_n \geqslant 5\,000$.

Corrigé

122. 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3(n+1) + 2 - (3n+2) \\ &= 3n + 3 + 2 - 3n - 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n > 0$.

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

2. On conjecture que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. $$\begin{aligned} u_n \geqslant 5\,000 &\Leftrightarrow 3n + 2 \geqslant 5\,000 \\ &\Leftrightarrow 3n \geqslant 4\,998 \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{4998}{3} \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 1\,666 \end{aligned}$$

Le premier entier n tel que $u_n \geqslant 5\,000$ est 1 666.

125 Soit (u_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = n^2 + 100 \times (-1)^n$.

1. À l'aide de la calculatrice, déterminer le premier entier n tel que $u_n > 1\,000$. On notera N cet entier.

2. Déterminer la valeur de u_{n+1}. A-t-on $u_{n+1} > 1\,000$?

Corrigé

125. 1. Le premier entier n tel que $u_n > 1\,000$ est $N = 32$ ($u_{32} = 1\,124$).

2. $u_{N+1} = u_{33} = 33^2 + 100 \times (-1)^{33} = 989$