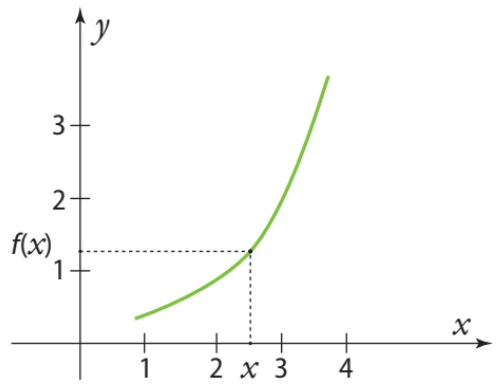
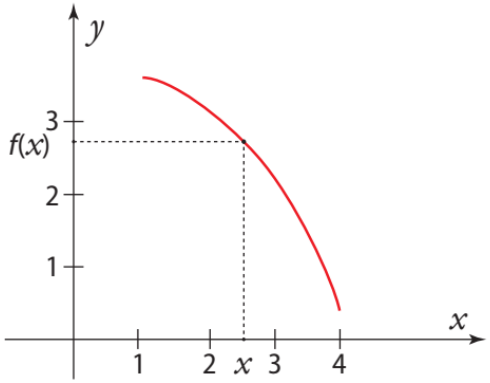
Variations et extremum

I. Variations d'une fonction

Définition - Fonction croissante et fonction décroissante

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que f est **croissante** sur I si lorsque x **augmente sur I alors $f(x)$ augmente**.
  Autrement dit, pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- On dit que f est **décroissante** sur I si lorsque x augmente sur I alors $f(x)$ diminue.
  Autrement dit, pour tous réels x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Fonction croissante sur I	Fonction décroissante sur I
	

Remarques

- Si (C_f) est la courbe représentative d'une fonction f croissante sur I, alors (C_f) « monte ».
  Inversement, si f est décroissante sur I, alors (C_f) « descend ».
- Si, sur un intervalle I, f garde la même valeur, on dit que f est constante sur cet intervalle.
  Alors sa courbe est horizontale sur cet intervalle.

Définition - Fonction monotone

Si f ne change pas de variation sur I, on dit que f est monotone sur I.

Remarque

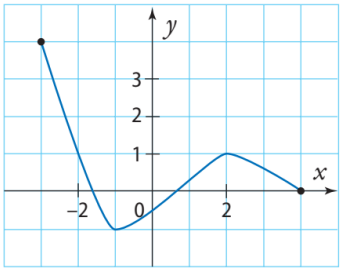
Si, sur un intervalle I, f est croissante (respectivement décroissante) sans être constante sur une partie de I, on dit que fest strictement croissante (respectivement strictement décroissante).

Propriété - Tableau de variations

Un tableau de variations regroupe les informations concernant les variations d'une fonction sur son ensemble de définition.

Exemple

f est une fonction définie sur $[-3\,;4]$ dont voici la courbe ci-dessous ainsi que sont tableau de variations.



x	-3		-1		2		4
f	4	↘	-1	↗	1	↘	0

On peut lire que f est décroissante sur $[-3\,;-1]$, croissante sur $[-1\,;2]$ et décroissante sur $[2\,;4]$.

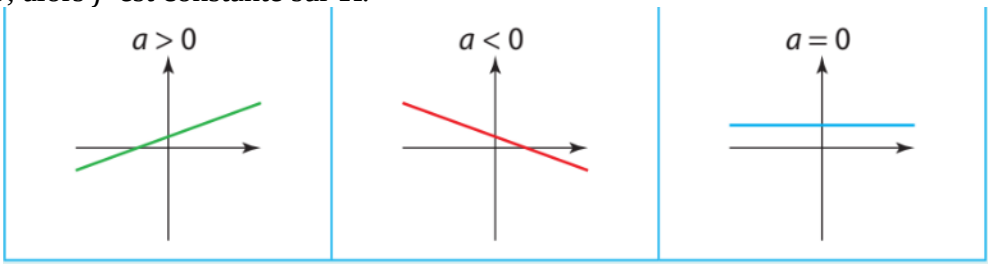
↳ Exercices résolus 1 et 2 p. 223-224

II. Variations de fonctions de référence

Propriété - Fonction affine

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + \text{b}$ avec a et b réels.

- Si $a > 0$, alors f est croissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a < 0$, alors f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $a = 0$, alors f est constante sur $\mathbb{R}$.



Exemples

- $x \longmapsto 4x - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$ car $a = 4 > 0$.
- $x \longmapsto -2x + 8$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ car $a = -2 < 0$.

Remarques

- Si a > 0, f est représentée par une droite avec une **pente positive**.
- Si a < 0, f est représentée par une droite avec une **pente négative**.

Démonstration

Soit f une fonction affine avec $f(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.

- On suppose que $a < 0$.
  Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.
  $a < 0$ donc $ax_1 \geq ax_2$ puis $ax_1 + b \geq ax_2 + b$.
  Cela veut dire que $f(x_1) \geq f(x_2)$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

- On suppose que $a > 0$.
  Soit x_1 et x_2 deux réels tels que $x_1 \leq x_2$.
  $a > 0$ donc $ax_1 \leq ax_2$ puis $ax_1 + b \leq ax_2 + b$.
  Cela veut dire que $f(x_1) \leq f(x_2)$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

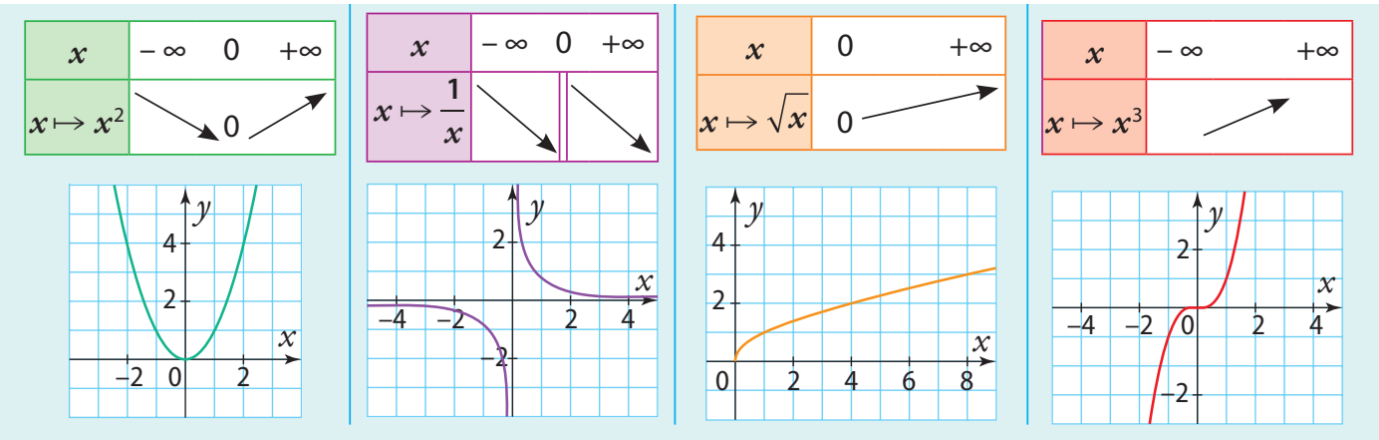
Propriétés - Fonctions de référence

Fonction carré
La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Fonction inverse
La fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$ et décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Fonction racine carrée
La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est croissante $\mathbb{R}^+$.

Fonction cube
La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.



Exemple

La fonction carré, comme la fonction racine carrée, admet 0 pour minimum et il est atteint pour $x = 0$.
Elle n'admet pas de maximum.

Démonstration pour la fonction carré

Soit x_1 et x_2 deux réels.
Alors $x_2^2 - x_1^2 = (x_2 - x_1)(x_2 + x_1)$

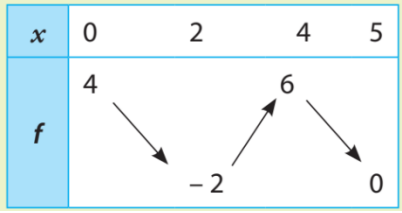
- Sur $]-\infty ; 0]$, si $x_1 \leq x_2 \leq 0$ alors $x_2 - x_1 \geq 0$ et $x_2 + x_1 \leq 0$ (somme de réels négatifs), donc $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \leq 0$ par la règle des signes
  On en déduit que donc $x_2^2 - x_1^2 \leq 0$ et donc que $x_1^2 \geq x_2^2$.
  La fonction carré est décroissante sur $]-\infty ; 0]$

- Sur $[0 ; +\infty[$si $x_1 \leq x_2 \leq 0$ alors $x_2 - x_1 \geq 0$ et $x_2 + x_1 \geq 0$ (somme de réels positifs), donc $(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) \geq 0$ par la règle des signes
  On en déduit que donc $x_2^2 - x_1^2 \geq 0$ et donc que $x_1^2 \leq x_2^2$.
  La fonction carré est croissante sur $[0 ; +\infty[$

Exercice résolu n°3 page 225

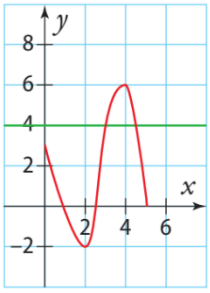
f est une fonction dont voici le tableau de variations.

1) Comparer les nombres $f(0)$ et $f(1)$ en justifiant.
2) Même question pour les nombres $f(2)$ et $f(3)$.
3) On sait, de plus, que $f(3) = f(4{,}2) = 4$.
   Résoudre :
   a) $f(x) = 4$ b) $f(x) > 4$
4) Tracer une représentation possible de la courbe représentative de la fonction f.



Solution

1) 0 et 1 sont des nombres de l'intervalle $[0 ; 2]$.
f est décroissante sur cet intervalle et $0 \leq 1$ donc $f(0) \geq f(1)$.
2) 2 et 3 sont des nombres de l'intervalle $[2 ; 4]$.
f est croissante sur cet intervalle et $2 \leq 3$ donc $f(2) \leq f(3)$.
3) a) D'après le tableau de variations, $f(0) = 4$.
De plus f est croissante Sur $[2 ; 4]$ et $f(3) = 4$ donc sur $[2 ; 4]$, $f(x) = 4$ a une solution qui est 3.
On trouve de même une unique solution 4,2 sur $[4 ; 5]$.
Finalement, les solutions sont 0 ; 3 et 4,2.
b) En utilisant le résultat de la question précédente et les variations de f on trouve que les solutions de cette équation sont les nombres de l'intervalle $[3 ; 4{,}2]$.



À vous de jouer !

3 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-2		-1		3
f	5	↘	-2	↗	4

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Comparer $f(0)$ et $f(2)$.
3. Comparer $f(-2)$ et $f(-1{,}5)$.

4 f est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	-4		-1		1		3
f	1	↘	-1	↗	5	↘	4

On sait de plus que $f(0) = 1$ et $f(0{,}5) = 4$.
Résoudre les équation et inéquations suivantes.

a) $f(x) = 4$ **b)** $f(x) > 4$

c) $f(x) \leqslant 1$ **d)** $f(x) > 1$

↪ Exercices 21 à 25 p. 227

III. Extremum d'une fonction

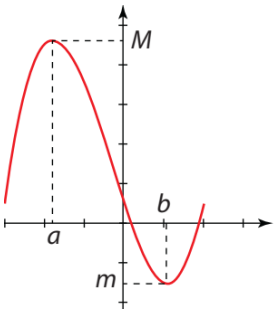
Définition - Maximum et minimum d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que fa pour maximum M sur I s'il existe a dans I tel que $f(a) = M$ et $f(x) \leq M$ pour tout $x \in I$. Autrement dit, M (s'il existe) est l'ordonnée du point le plus haut de la courbe de f sur I.
- On dit que f a pour minimum m sur I s'il existe b dans I tel que $f(b) = m$ et $m \leq f(x)$ pour tout $x \in I$. Autrement dit, m (s'il existe) est l'ordonnée du point le plus bas de la courbe de f sur I.

Remarques

- Un extremum est un minimum ou un maximum.
- Une fonction peut ne pas avoir de minimum ou de maximum.

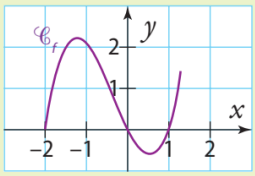


Exercice résolu n°4 page 225

4 Déterminer le maximum ou le minimum d'une fonction

↪ Cours 3 p. 222

f et g sont deux fonctions dont on donne ci-contre respectivement la courbe représentative dans un repère et le tableau de variations.



x	−1		3		5		7
g	4	↘	−1	↗	4	↘	3

1. Déterminer le minimum de f sur $[-2 ; 1,3]$ et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

2. g admet-elle un maximum sur $[-1 ; 7]$? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?

Solution

1. f admet un minimum qui vaut $-0,6$ et qui est atteint pour $x = 0,5$. 1

2. g a un maximum qui vaut 4 ; il est atteint pour $x = -1$ et pour $x = 5$. 2

Conseils & Méthodes

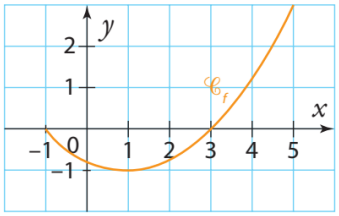
1 On repère le ou les points de la courbe les plus bas. L'ordonnée correspond au minimum de la fonction, l'abscisse correspond aux valeurs de x pour lesquelles il est atteint.

2 On lit dans la deuxième ligne du tableau l'image la plus grande ; l'abscisse correspondante située dans la première ligne indique pour quelle valeur de x le maximum est atteint.

À vous de jouer !

7 f est une fonction dont voici la courbe.

f admet-elle un minimum ? Si oui, pour quelle(s) valeur(s) de x est-il atteint ?



8 g est une fonction dont voici le tableau de variations.

x	0		1		3		4
g	2	↘	−1	↗	1	↘	0

g admet-elle un maximum ? Pour quelle(s) valeur(s) de x ?

↪ Exercices 34 à 37 p. 228