Nombre et calculs

I. Multiples, diviseurs et nombres premiers

1. Multiples et diviseurs

Définitions - Multiple et diviseur

Soit a et b deux nombres entiers. S'il existe un nombre entier k tel que $a = bk$, on dit que :

- b .... a ou que b est .... de a ;
- ou que a est .... de b ou que a est .... b.

Exemple

357 est divisible par 3 (car $3 + 5 + 7 = 15$ qui est divisible par 3 et $357 = 3 \times 119$) :

- 357 est divisible par 3 (et par 119) et 3 est un diviseur de 357 (et 119 aussi) ;
- 357 est donc un multiple de 3 (et de 119).

Remarques

① Si $a = bk$ alors le reste de la division euclidienne de a par b est ...., c'est-à-dire que $\frac{a}{b}$ est un ....

② 1 et n sont des .... de n.

Propriété - Nombres pairs et impairs

Soit n un nombre entier.
n est **pair** si et seulement s'il existe un entier p tel que ... ...
n est **impair** si et seulement s'il existe un entier p tel que ... ...

Propriété – Carré d'un nombre impair

Si n est impair alors n^2 est ....

Démonstration

....

2. Nombres premiers

Définition - Nombre premier

Un nombre premier est un nombre qui admet ....

Remarque

1 n'est pas premier car ....

Exemple

Voici la liste des 10 premiers nombres premiers ; ....

Propriété - Diviseur premier d'un entier

Soit n un nombre entier qui n'est pas premier. Son plus petit diviseur différent de 1 est un nombre premier plus petit ou égal à ... ...

Exemple

$12 =$ ... ... $=$ ... ... Le plus petit diviseur de 12 est … qui est premier.
Chacun des diviseurs premiers de 12 est plus petit ....

Propriété - Décomposition d'un nombre entier

Tout nombre entier peut se décomposer de manière unique sous la forme d'un ……………………………………………………………………………………..

Définition - Fraction irréductible

Une fraction est irréductible si …………………………………………………………… ……………………………………………………………………………………………....

Exemple

$\frac{5}{3}$ est une fraction irréductible car ……………………………………………………...

$\frac{12}{15}$ n'est pas une fraction irréductible car ……………………………………………...

II. Puissances entières d'un nombre relatif

1. Notations a^n et a^{-n}

Définition - Puissances d'un nombre

Pour tout nombre entier n positif non nul, pour tout nombre relatif a :

$$a^n = \underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..}_{n\ facteurs}$$

Et, si a est non nul,

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots}_{n\ facteurs}}$$

Par convention, $a^0 =$ .....

a^n (lu « … … … … … … … ») est appelé ……………………… de a et n est appelé ………………...

Remarque

En particulier, $a^1 =$ … et $a^{-1} =$ ....

Exemples

$$2^4 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. = \dots\dots$$

$$5^{-3} = \dots.. = \frac{1}{\dots\dots\dots\dots.} = \frac{1}{\dots\dots..} = \dots\dots\dots..$$

La décomposition de 12 en produits de facteurs premiers est … … … … … ....

On écrit $12 =$ … … … … ...

2. Calculs avec les puissances

Dans tout ce paragraphe, on considère deux nombres entiers relatifs n et m et un nombre a.

Règle - Calculs avec les puissances

$a^n \times a^m = \dots\dots..$; $a^n \times b^n = \dots\dots\dots$; $\frac{a^n}{a^m} = \dots\dots\dots.(a \neq 0)$; $(a^m)^p = \dots\dots\dots....$

Démonstration

Si n et m sont positifs : $a^n \times a^m =$ … … … … ..

Exemples

$A = (-2)^4 \times (-2)^3 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\quad B = 7^{-3} \times 7^{-7} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$

$C = (-2)^4 \times 5^4 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ $\quad C = \frac{6}{6^{-3}} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$E = 10^{-3\times(-7)} \times 10^{2\times(-3)} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$

Remarque
Attention, il n'y a pas de règle avec l'addition ou la soustraction de puissances.

Exemples

$$5^3 + 5^{-2} = 5 \times 5 \times 5 + \frac{1}{5 \times 5} = 125 + \frac{1}{25} = 125{,}04$$
$$5^{3-2} = 5^1 = 5 \quad et \quad 5^3 + 5^{-2} \neq 5^{3-2}$$

III. Racine carrée

1. Définitions

Définition - Racine carrée

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté … …., dont le carré est a :
… … … … … … … … … … … … … … …

Définition - Carré parfait

Un carré parfait est ……………………………………..

Remarques
Le carré d'un nombre est toujours ……………….
Lorsque a est un nombre strictement négatif, $\sqrt{a}$ ……………………………………….

Exemples

$\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$ et 1 est positif $\qquad \left(\sqrt{3{,}6}\right)^2 = 3{,}6$ car $3{,}6 > 0$

$3^2 = 9$ et 3 est positif donc $\sqrt{9} = 3$ $\qquad$ 2 est positif donc $\sqrt{2} \times \sqrt{2} = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

Règle - Racine d'un carré

Pour tout nombre a, $\sqrt{a^2} =$ …. si … … … .. et $\sqrt{a^2} =$ … .. si … … ….

Exemples

$\sqrt{(1{,}3) \times (1{,}3)} =$ … … … … … … … … … … … … … …..

$\sqrt{(-5)^2} =$ …

2. Calculs avec les racines carrées

Règle - Calculs avec les racines carrées

Pour tous nombres positifs a et b : $\sqrt{a \times b} =$ … … … … …. ; $\sqrt{\frac{a}{b}} =$ … … … $(b \neq 0)$

Exemples

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \text{… … … … … … … …}$$

$$\sqrt{\frac{36}{25}} = \text{… … … … … … …}$$

Remarque

Attention $\sqrt{a}+\sqrt{b}\neq\sqrt{a+b}$

En effet, on a par exemple 25 = 16 + 9, mais $\sqrt{25}=5$ et $\sqrt{16}+\sqrt{9}=4+3=7$ donc $\sqrt{25}\neq\sqrt{16}+\sqrt{9}$

IV. Ensemble de nombres

Définitions - Ensemble de nombres

- L'ensemble des entiers naturels, noté … … .., est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif : … … … … … … … … … … … … … … … … …
- L'ensemble des entiers relatifs, noté … .., est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous forme d'un entier positif ou négatif : … … … … … … … … … … … … … … … … … … … ..
- L'ensemble des nombres décimaux, noté … …, est l'ensemble des quotients qui peuvent s'écrire sous la forme ……. avec a un entier relatif et n un entier positif.
- L'ensemble des nombres rationnels, noté … .., est l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire sous la forme d'un quotient … …. avec a un entier relatif et b un entier relatif non nul.

Exemples

$\frac{6}{3}\in\mathbb{N}$ car $\frac{6}{3}=2$ $\quad -45\in\mathbb{Z}$ $\quad 12{,}45\in\mathbb{D}$ car $12{,}45=\frac{1245}{100}=\frac{1245}{10^2}$ $\quad -\frac{17}{11}\in\mathbb{Q}$

Définition - Nombres réels

Soit une droite munie d'une origine O et d'une graduation.
L'ensemble des abscisses de l'axe ainsi défini s'appelle **l'ensemble des nombres réels** et se note $\mathbb{R}$.
Un tel axe est appelé **droite des réels**.

Propriété - Inclusion des ensembles de nombres

Les entiers naturels sont aussi des entiers relatifs qui sont des nombres décimaux qui sont des quotients : $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{D}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

Exemples

- D'après l'activité 1 , on peut construire un segment de longueur $\sqrt{2}$ et ce n'est pas un quotient : c'est un nombre réel.
- L'écriture décimale de π n'est pas périodique, ce n'est pas un quotient : c'est un nombre réel.

Propriété - Nature des racines carrées

Soit n un entier. $\sqrt{n}$ est soit un entier dans le cas où n est un carré parfait soit un irrationnel.

Exemple

$\sqrt{5}$ est un nombre irrationnel et $\sqrt{9}$ est un nombre entier.