

Nombres et Calculs – Exercices Sésamath

Multiples et diviseurs (page 54)

28 On s'intéresse aux nombres de trois chiffres de la forme $65u$ où u représente le chiffre des unités.

Quelles sont les valeurs possibles de u pour obtenir :

- a) un multiple de 2 ?
b) un nombre divisible par 9 ?

29 Trouver tous les nombres de trois chiffres divisibles à la fois par 3 et par 5 et dont le chiffre des centaines est 7.

30 Écrire la liste de tous les diviseurs de :

- a) 32 b) 67 c) 81 d) 144

31 Répondre par Vrai ou Faux. Justifier.

- a) Tout nombre qui a pour chiffre des unités 3 est divisible par 3.
b) Tout nombre divisible par 4 et 5 est divisible par 10.
c) Tout nombre divisible par 3 et 2 est divisible par 5.
d) Tout nombre divisible par 2 est divisible par 4.

Nombres premiers

33 Parmi les nombres ci-dessous, indiquer ceux qui ne sont pas des nombres premiers.

- a) 19 b) 169 c) 1 009 d) 127
e) 558 f) 615 g) 2 367 h) 14 674

34 Décomposer chacun des nombres suivants en produit de facteurs premiers.

- a) 215 b) 507 c) 1 868 d) 1 431

38 1. Décomposer 2 261 et 323 en produits de facteurs premiers.

2. Simplifier la fraction $\frac{2261}{323}$.

3. Effectuer $\frac{2261}{323} + \frac{7}{49}$.

41 1. 35 et 6 300 sont-ils divisibles par 7 ? Justifier.

2. En utilisant la question 1., démontrer que 6 335 est divisible par 7.

3. Démontrer, dans le cas général, que si x et y sont deux nombres entiers divisibles par 7 alors leur somme $x + y$ est divisible par 7.

4. En écrivant le nombre 6 349 147 comme une somme de quatre multiples de 7, démontrer que 6 349 147 est un multiple de 7.

Calculs avec des puissances

46 Recopier et compléter.

- a) $12^{-5} = \frac{1}{12^{\dots}}$ b) $7^{\dots} = \frac{1}{7^5}$
c) $8^{-6} = \frac{1}{8^{\dots}}$ d) $\frac{1}{9^{\dots}} = 9^{-23}$
e) $1,5^2 = \frac{1}{1,5^{\dots}}$ f) $(-7)^3 = \frac{1}{(-7)^{\dots}}$

47 Écrire sous la forme a^n , où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.

- a) $5^2 \times 5^4$ b) $6^5 \times 6^{-8}$ c) $3^4 \times 5^4$
d) $2,5^{-7} \times 4,2^{-7}$ e) $-4 \times (-4)^{-7}$ f) $(-2)^{-3} \times (-2)^5$

48 Écrire sous la forme a^n , où a est un nombre relatif et n est un entier relatif.

- a) $\frac{3^8}{3^{-4}}$ b) $\frac{6^5}{3^5}$ c) $\frac{4^6}{4^2}$
d) $\frac{(-4,5)^4}{3^4}$ e) $\frac{9^{-3}}{(-2,5)^{-3}}$ f) $\frac{3,2^{-5}}{3,2^{-2}}$

49 Écrire sous la forme d'une seule puissance.

- a) $2,8 \times 2,8^{-3}$ b) $\frac{5^{-2}}{5^{-4}}$ c) $((-3,7)^{-2})^5$
d) $\frac{7^{-3}}{2^{-3}}$ e) $((5,6)^{-4})^{-2}$ f) $10^7 \times 10^{-7}$
g) $(-6)^8 \times (-6)^{-3}$ h) $5,3^{-6} \times 4^{-6}$ i) $\frac{(-4,2)^{-5}}{(-3)^{-5}}$

50 Écrire sous la forme d'une seule puissance.

$$A = 8^2 \times 8^{-3} \times 8^7$$

$$B = 11^{-8} \times \frac{11^7}{11^{-4}}$$

$$C = \frac{(-3)^6 \times (-3)^{-8}}{(-3)^{-7}}$$

Calculs avec des racines carrées

56 Déterminer, si possible, la racine carrée des nombres suivants.

- a) 100 b) 9 c) -36 d) $(-8)^2$
e) 169 f) -1 g) -52 h) π

57 Sans utiliser de calculatrice, donner la valeur des nombres suivants.

- a) $(\sqrt{25})^2$ b) $\sqrt{3^2}$ c) $(-\sqrt{16})^2$
d) $(\sqrt{0,14})^2$ e) $\sqrt{(-7)^2}$ f) $\sqrt{0,4^2}$

58 Écrire sous la forme $a\sqrt{3}$, où a est un entier.

- a) $\sqrt{5} \times \sqrt{15}$ b) $\sqrt{75}$
c) $\sqrt{7} \times \sqrt{21}$ d) $\sqrt{108}$

59 Écrire les nombres suivants sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers positifs, b étant le plus petit possible.

- a) $\sqrt{32}$ b) $\sqrt{75}$ c) $\sqrt{500}$ d) $\sqrt{80}$
e) $-\sqrt{48}$ f) $5\sqrt{18}$ g) $-4\sqrt{32}$

60 Écrire sans radical les expressions suivantes.

- a) $\sqrt{\frac{4}{9}}$ b) $\sqrt{\frac{1}{16}}$ c) $\sqrt{\frac{49}{25}}$ d) $\frac{2}{7}\sqrt{\frac{49}{64}}$

61 Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

- a) $\sqrt{2} \times \sqrt{6}$ b) $\sqrt{3} \times \sqrt{6}$
c) $\sqrt{7} \times 3\sqrt{14}$ d) $7\sqrt{2} \times 5\sqrt{70}$

64 Calculer les expressions suivantes.

$$A = \frac{\left(1 - \frac{1}{5}\right)\left(1 - \frac{2}{5}\right)\left(1 - \frac{4}{5}\right)\left(1 - \frac{5}{5}\right)}{3}$$

$$B = \frac{25}{8} \times \frac{\frac{23}{4} - 13 \times \frac{27}{19}}{\frac{23}{4} - 13 \times \frac{27}{19}} \div \frac{25}{8}$$

$$C = \frac{12}{9 + \frac{8}{7 + \frac{6}{5 + \frac{4}{3 + \frac{2}{1+1}}}}}$$

133 $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel

1. On suppose que $\sqrt{2}$ est un quotient de deux entiers relatifs p et q . Il peut donc s'écrire sous la forme $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ où $\frac{p}{q}$ est un quotient irréductible.

Démontrer que $2q^2 = p^2$ et en déduire que p^2 est pair.

2. Démontrer que p est pair.

3. p étant pair, p peut s'écrire sous la forme $2p'$. Calculer alors q^2 .

Que peut-on en déduire pour la parité de q ?

Que peut-on dire de la fraction $\frac{p}{q}$?

Ensembles de nombres

Démonstration

105 1. Écrire sous la forme $a\sqrt{5}$ avec a entier.

$$A = 3\sqrt{20} + \sqrt{45}$$

$$B = \sqrt{180} - 3\sqrt{5}$$

2. (D'après Brevet.) Démontrer que $A \times B$ et $\frac{A}{B}$ sont des nombres entiers.

106 (D'après Brevet)

$$\text{Soit } D = \frac{5\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}.$$

À quel ensemble le nombre D appartient-il ?

107 (D'après Brevet)

$$\text{On pose } M = \frac{20\,755}{9\,488} - \frac{3}{8}.$$

1. Écrire, en détaillant les calculs, le nombre M sous la forme d'une fraction irréductible.

2. Le nombre M est-il décimal ?

Est-il rationnel ? Justifier.

123 Développement décimal illimité

1. Justifier que $x = 0,999\dots$ est solution de $10x - 9 = x$.

2. Résoudre $10x - 9 = x$.

3. Conclure.

Démonstration

131 $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal

On suppose que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal.

1. Démontrer qu'il existe un entier naturel n et un entier relatif a tel que $10^n = 3a$.

2. Déterminer la décomposition en produit de facteurs premiers de 10^n .

3. On note $a = p_1^{n_1} \times \dots \times p_m^{n_m}$ la décomposition en produit de facteurs premiers.

Démontrer que $\frac{1}{3}$ ne peut pas être un nombre décimal.