Inégalités et intervalles

I. Intervalles de $\mathbb{R}$

1. Définitions et notations :

Définition

L'ensemble des nombres réels compris, au sens large, entre deux nombres a et b est appelé l'……………….désignant tous les nombres réels *x* tels que …………………
On le note : … … … … … … ..

Exemple :

L'ensemble de tous les nombres réels *x* tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note :… … … … … ….

$4 \dots \dots [-2\,;\ 7]$ $-1 \dots \dots . [-2\,;\ 7]$ $8 \dots \dots . . [-2\,;\ 7]$

Nombres réels *x*	Notation	Représentation
$a \leq x \leq b$		
$a < x \leq b$		
$a \leq x < b$		
$a < x < b$		
$x \geq a$		
$x > a$		
$x \leq b$		
$x < b$		

Remarque
L'ensemble des nombres réels ℝ est un intervalle qui peut se noter … … … … … … … … ..

Exemple

L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $x < 3$ se note … … … … … … … .. et peut se représenter comme ci-dessous :

2. Intervalle ouvert et intervalle fermé :

Définitions

On dit qu'un intervalle est <u>fermé</u> si ses extrémités …………………………… à l'intervalle.
On dit qu'il <u>ouvert</u> dans le cas ………………..

Exemples

- L'intervalle [-2 ; 5] est un intervalle ………………
  On a : -2 **…..** [-2 ; 5] et 5 **…….** [-2 ; 5]

- L'intervalle]2 ; 6[est un intervalle …………………
  On a : 2 **…..**]2 ; 6[et 6 **……**]2 ; 6[

- L'intervalle]6 ; +∞[est également un intervalle ………………

3. Intersections et unions d'intervalles :

Définitions

- L'intersection de deux intervalles I et J est l'ensemble noté … … … .. qui contient les nombres qui appartiennent à … … … … … … ….
- La réunion de deux intervalles I et J est l'ensemble noté … … … … … qui contient les nombres qui appartiennent à…………………

Exemple
En prenant $I = [0\ ;\ 12]$ et $J = [3\ ;\ 20]$:

Remarque
On a $\mathbb{R}^* =]-\infty\ ; 0[\cup]0\ ;\ +\infty[$

<u>Méthode : Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalles</u>

Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :

1) I =[-1 ; 3] et J =]0 ; 4[
2) I =] -∞ ; -1] et J = [1 ; 4]

II. Inégalités, inéquations et modélisation

Règle Manipulation des inégalités

a, b, c et k sont des nombres réels.

- Ajouter ou soustraire un même nombre aux deux membres d'une inégalité conserve l'ordre de l'inégalité.
  Si $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ alors ... ... et ... ...
- Multiplier ou diviser par un même nombre strictement positif conserve l'ordre de l'inégalité.
  Si $\boldsymbol{k} > \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ alors ... ... et ... ...
- Multiplier ou diviser par un même nombre strictement négatif change l'ordre de l'inégalité.
  Si $\boldsymbol{k} < \mathbf{0}$ et $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b}$ alors ... ... et ... ...

Remarque

Les propriétés restent identiques en utilisant des inégalités larges ($\leq$ ou $\geq$) au lieu des inégalités strictes ($<$ et $>$) ou des encadrements.

Exemple

Si $a < 10$ alors $-6a > (-6) \times 10$ en multipliant par (-6) (qui est strictement négatif) donc $-6a > 60$.

Propriété – Inégalité et somme

Soit a, b, c et d quatre nombres réels tels que $a < b$ et $c < d$ alors ... ...

Définition - Inéquation

Une inéquation est une inégalité dans laquelle est présente une …………………. (ou des ………..).
Résoudre une inéquation revient à **……………………**l'ensemble de **…………………………**de l'inconnue qui vérifient l'inégalité.

Remarque

Une inéquation de la forme $\boldsymbol{ax} + \boldsymbol{b} < \boldsymbol{cx} + \boldsymbol{d}$ (où x est l'inconnue et a, b, c et d sont des nombres réels avec a et b non tous deux nuls) est appelée **………………………………**

Exemple

$3x + 4 < 7x + 9$ ou $2x + 6 \geq x - 5$ sont des exemples d'inéquations d'inconnue x (qui font partie de la famille des inéquations du 1er degré).

Règles - Résolution d'une inéquation du 1er degré

Si on applique l'une des règles de manipulation des inégalités aux deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation qui lui est équivalente c'est-à-dire qui a ………………………………….

Remarque

On se sert du symbole $\Leftrightarrow$ pour signifier « **……………………………** ».

Exemple

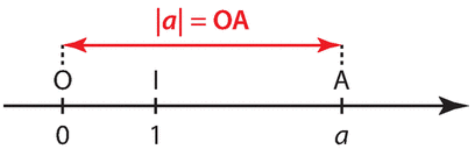
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-3x + 2 \geq 8 \Leftrightarrow$ ... ... (en soustrayant 2) $\Leftrightarrow$ ... ... (en divisant par -3).
L'ensemble des solutions est $S =$ ... ...

Remarque
La résolution d'inéquation permet par exemple de comparer des expressions.

Définition - Modélisation d'un problème
Modéliser un problème par une inéquation, c'est écrire une inéquation en lien avec les contraintes exposées par le problème.

III. Valeur absolue d'un nombre réel

Définition - Valeur absolue et distance
Sur une droite graduée munie d'une origine O et d'une graduation, on considère un point A d'abscisse a.
La valeur absolue de a, notée ... ... est le nombre égal à la ……………………...



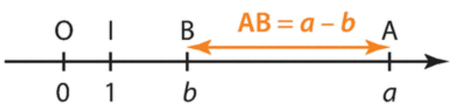
Propriété - Valeur absolue et signe
La valeur absolue d'un nombre réel a est le nombre ... . tel que ... ...

Exemple
On a $|3| =$ ... ... et $|-2{,}8| =$ ... ... $=$ ... .

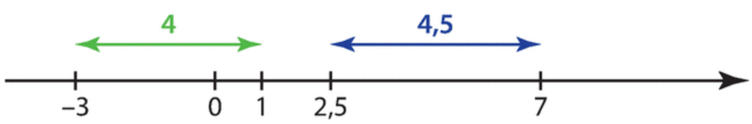
Propriété - Valeur absolue et racine carrée
Pour tout nombre réel a, on a $\sqrt{a^2} =$ ... ...

Définition – Distance entre deux points
Soit A et B les points d'abscisses a et b sur une droite munie d'une origine et d'une graduation.
On appelle distance entre les réels a et b, la distance ... ...

Propriété – Distance et abscisse
- Si $a \geq b$ alors $AB =$ ... ...
- Si $a < b$ alors $AB =$ ... ...



Exemples
① La distance entre 7 et 2,5 (ou entre 2,5 et 7) est égale à ... ...
② La distance entre 1 et -3 est égale à ... ...

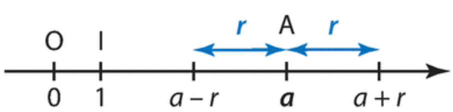


Propriété – Distance et valeur absolue
La distance entre a et b est égale à ... ...

Démonstration

Propriété - Intervalle et valeur absolue
Si un intervalle peut s'écrire sous la forme $[a - r\,;\ a + r]$ où a est un nombre réel et r un nombre réel strictement positif, alors on a :

$$x \in [a - r\,; a + r] \Leftrightarrow \text{... ... ...}$$



Dans ce cas le nombre a est appelé **…………..** de l'intervalle et le nombre r **…………** de l'intervalle.