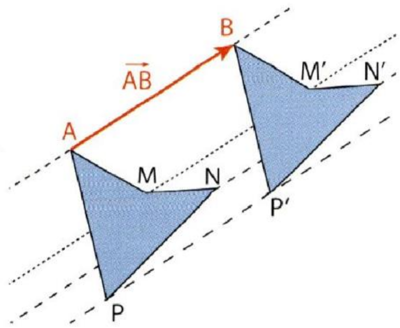
Les vecteurs

A. Notion de vecteurs

a) Translations et vecteurs

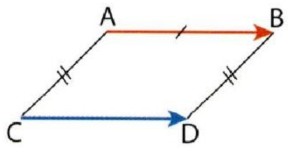


DÉFINITIONS
A et B sont deux points distincts du plan.
La **………………….. qui transforme …. en ….** est appelée **translation de …………………...**
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour **…………...** celle de la droite (AB), pour **………** celui de A vers B et pour **……………** la longueur AB.

Par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ les points A, M, N, P ont pour **image** respectives les points …………………………………...

Image D d'un point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

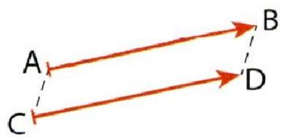
1er cas : $C \notin (AB)$
D est le point tel que
………………………………………..



2ème cas :$C \in (AB)$
D est le point de (AB) tel que … … … … … .. et tel que
…………………………………………………………………..

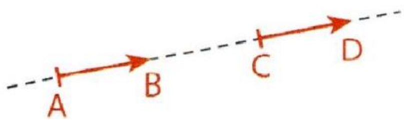
b) Vecteurs égaux

DÉFINITION
Lorsque la translation qui transforme A en B, transforme également C en D, on dit que ……………………………………………..
On note ………………



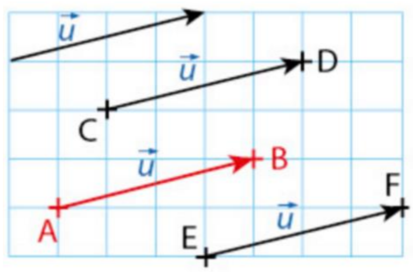
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont même …………, même ……. et même ……….

CONSÉQUENCE
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si, et seulement si, le quadrilatère … … … … est un ……………………….. (éventuellement aplati).



- **Représentants d'un vecteur**

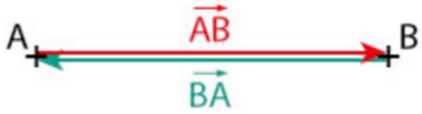
Il existe une infinité de vecteurs égaux au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Par exemple ci-contre : $\overrightarrow{AB} =$ … … $=$ … … $=$ …
Ce vecteur peut être noté $\vec{u}$ et on dit que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$ sont des ………………………… du vecteur $\vec{u}$.



- **Deux vecteurs particuliers**

La translation qui transforme le point A en A est la translation de ……………………

Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé ………………, on le note …... Ainsi … … … … … … ..
La translation qui transforme le point B en A est la translation de vecteur………
Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est appelé ………………… du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On note … … … … … … … … ..



Exercice 1 : résolu – Démontrer avec des vecteurs

a) ABC est un triangle. Construire le point D tel $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

b) M est un point appartenant au segment [BD],
Les points E et F sont les symétriques respectifs des points B et A par rapport au point M. Démontrer que le quadrilatère CDFE est un parallélogramme.

À votre tour

Exercice 2 :

ABC est un triangle.
I est un point du côté [AB] distinct de B et J un point du côté [BC].

a) Construire le point D tel que $\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{BI}$.

b) Les points E et F sont les symétriques respectifs des points J et D par rapport au point C.
Démontrer que le quadrilatère BIEF est un parallélogramme.

Exercice 3

ABC est un triangle.

a) Placer les points D, E, F et Q tels que $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD}$ et tels que les segments [AG] et [BF] ont le même milieu C.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{EF}$.
Que peut-on en déduire pour les droites (AG) et (EF)?

c) Démontrer que les droites (BF) et (DG) sont parallèles.

d) Démontrer que les droites (AF) et (BG) sont parallèles.

Exercice 4

ABCD est un parallélogramme.
I est le symétrique de B par rapport à A et J est le symétrique de D par rapport à C.

a) Citer des vecteurs égaux de cette figure.

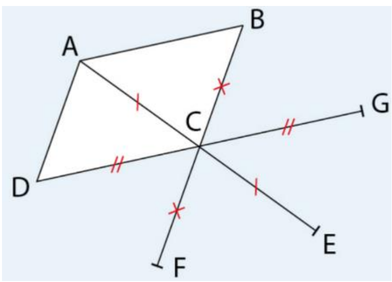
b) En déduire que AICJ est un parallélogramme.

Exercice 5

ABCD est un parallélogramme.
E, F et G sont les symétriques respectifs de A, B et D par rapport à C.

a) Démontrer que $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$.

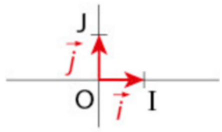
b) Démontrer que les droites (CF) et (GE) sont parallèles.



➢ **Exercices 21 à 25 de la fiche d'exercices**

B. Coordonnées d'un vecteur

Bien souvent, au lieu de noter (O ; I, J) un repère, on le note $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.

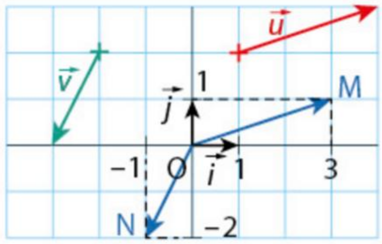


a) Coordonnées d'un vecteur

DÉFINITION

Dans $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$, les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ sont les coordonnées .... tel que ... ...

EXEMPLES



Dans le repère ci-contre, M a pour coordonnées (… ; …) et $\vec{u} = \cdots$ ..., donc $\vec{u}$ a pour coordonnées (… ; …).
N a pour coordonnées (... ; ...) et $\vec{v} =$ ... ..., donc $\vec{v}$ a pour coordonnées (... ; ...).
De même : $\vec{\imath}$(... ; ...) et $\vec{\jmath}$(... ; ...).

PROPRIÉTÉ

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, leurs ……………………………………………………...

Autrement dit, dans un repère, les vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$ sont égaux **si, et seulement si** ……… et ……….

DÉMONSTRATION

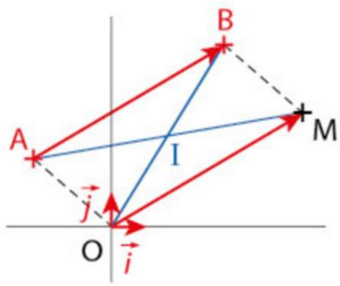
M et M'sont les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OM'}$.
Ainsi $\vec{u} = \vec{v}$ si, et seulement si, … . = ..., c'est-à-dire M et M' ont les ………………………, autrement dit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont ……………………...

b) Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$

PROPRIÉTÉ

Dans un repère, $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ sont deux points.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont (... ... ... ; ... ...)

DÉMONSTRATION



$M(x_M\,;y_M)$ est le point tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.
Les segments [AM] et [OB] ont le même milieu I.
Donc ... ... = ... et ... ... = ... c'est-à-dire
$x_B =$ ... ... et $y_B =$ ... ... soit $x_M =$ ... ... et $y_M =$ ... ...
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont celles de M, c'est-à-dire (... ... . ; ... ...).

EXEMPLES

$A(12\,;\,-4)$ et $B(3\,;5)$ sont deux points dans un repère.
On a $\overrightarrow{AB}$(... ... . ; ... ...) c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}$(... ... . ; ... ...) soit $\overrightarrow{AB}$(... ; ...)

Exercice 6 : résolu – Démontrer avec des coordonnées de vecteurs

Dans un repère, A(-2 ; 1), B(2 ; 4), C(3 ; 0) et D(-1 ; -3) sont des points.
Démontrer, de deux façons, que le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.

À votre tour

Exercice 7

Dans un repère on donne les points : I(2 ; -2), J(-1 ; -1), K(0 ; 1), L(-3 ; 2).

a) Placer ces points dans un repère.
b) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$. Contrôler les résultats par une lecture graphique.
c) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère IJLK?

Exercice 8

On reprend les points I, J, K, L donnés a l'exercice 7.

a) Déterminer les coordonnées des milieux des segments [IL] et [JK].
b) Que peut-on en déduire pour le quadrilatère IJLK?

Exercice 9

Dans un repère, on donne les points :
A (-2 ; 1), B (3 ; 3), C(-2 ; -4), D(3 ; -6), E (3 ; -2).

a) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{ED}$ et $\overrightarrow{AC}$.
b) Les quadrilatères ABEC et AEDC sont-ils des parallélogrammes ? Justifier.

Exercice 10

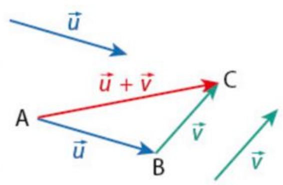
Dans un repère, on donne les points : A(2,3 ; 5,1), B (4,1 ; 3,8), C (0,9 ; -0,7), D (-0,9 ; 0,5).

a) Placer ces points dans un repère et conjecturer la nature du quadrilatère ABCD.
b) Démontrer si cette conjecture est vraie ou fausse.

➢ **Exercices 26 à 28 de la fiche d'exercices**

C. Somme de vecteurs

a) Vecteur somme



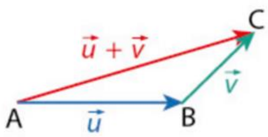
DÉFINITIONS

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associe à la translation résultant de l'enchaînement des translations de vecteur $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.
On note ce vecteur … … … ….

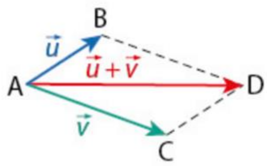
b) Construction du vecteur somme

Pour construire la somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on peut utiliser l'une des deux propriétés suivantes.

PROPRIÉTÉ - Relation de Chasles
Pour tous points A, B et C : ……………=..…



PROPRIÉTÉ – Règle du parallélogramme
A, B et C sont trois points.
… = … + … si et seulement si … … … … … … … … … … … … … … … … … …..



DÉMONSTRATION

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ si, et seulement si, d'après la relation de Chasles $\overrightarrow{A\,...} + \overrightarrow{...\,D} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{....} = \overrightarrow{....}$

Ainsi ... $=$ ... ... si, et seulement si, ……………………………….....

c) Coordonnées du vecteur somme

PROPRIÉTÉ

Si dans un repère, $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, alors $\vec{u}+\vec{v}$ (... ... . ; ... ...)

DÉMONSTRATION

On note $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{MN}$. Alors $\vec{u}+\vec{v} =$ ... ... $=$ .....

Donc les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ sont celles du point .... Or $\vec{v} = \overrightarrow{......}$, donc les coordonnées de ces vecteurs sont égales c'est-à-dire :

$x' =$ ... ... et $y' =$ ... ... D'où $x_N =$ ... ... et $y_N =$ ... ... , soit $\vec{u}+\vec{v}$ (... ... ... ; ... ...).

PROPRIÉTÉ

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

$\vec{u}+\vec{v} =$ ... ... $\quad \vec{u}+\vec{0} =$ ... ... $=$ ... $\quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} =$ ... ...

Exercice 11 : résolu – Construire un vecteur somme

ABCD est un rectangle de centre I.

a) Construire le représentant d'origine C du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{BC}$.

b) À quel vecteur de la figure, le vecteur $\vec{u}$ semble-t-il égal ?
Prouver cette conjecture.

À votre tour

Exercice 12

ABCD est un parallélogramme.

I est le milieu du côté [BC].

a) Construire le représentant d'origine B du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{CI}$.

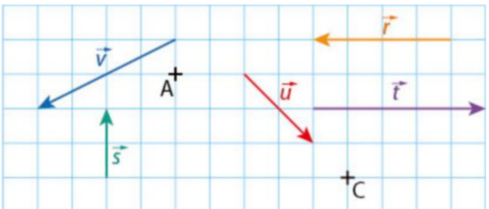
b) À quel vecteur de la figure, le vecteur $\vec{u}$ semble-t-il égal ?

c) Prouver cette conjecture.

Exercice 13

Placer sur la figure ci-dcontre, les points B et D tels que :

- $\overrightarrow{AB} = \vec{u}+\vec{v}$
- $\overrightarrow{CD} = \vec{r}+\vec{s}+\vec{t}$



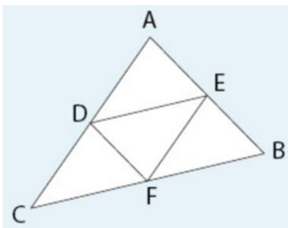
Exercice 14

Sur cette figure, AEFD, DEBF et DEFC sont des parallélogrammes.

a) Construire cette figure et le représentant d'origine A du vecteur
$\vec{u} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{FE}$.

b) Construire le représentant d'origine D du vecteur
$\vec{v} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$.

c) Démontrer que $\vec{u} = \vec{v}$.



Exercice 15

ABCD est un carré de centre I.

Construire le point M tel que $\overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}$.

Que conjecture-t-on ? Prouver cette conjecture.

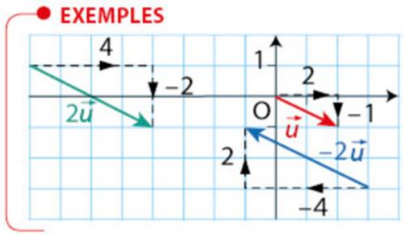
➢ **Exercices 29 à 34 de la fiche d'exercices**

D. Produit d'un vecteur par un nombre réel

a) Le vecteur $\lambda\vec{u}$

DÉFINITIONS

λ désigne un nombre réel et $\vec{u}(a\,;b)$ un vecteur dans un repère.
Le vecteur $\lambda\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées (… … ; … …).



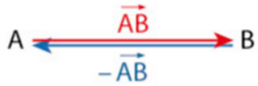
On admet que le vecteur $\lambda\vec{u}$ ainsi défini est indépendant du repère.

Remarque : aux exemples ci-dessus, les vecteurs $\vec{u}$ et $2\vec{u}$ ont le **même …….** car λ … … (ici λ = 2), les vecteurs $\vec{u}$ et $-2\vec{u}$ ont des **…………………..** car ………. (ici $\lambda = -2$).

PROPRIÉTÉS – admises

(1) Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tous nombres réels λ et λ' :
$\lambda(\vec{u}+\vec{v}) =$ … … … … … $(\lambda+\lambda')\vec{u} =$ … … … … … $(\lambda\lambda')\vec{u} =$ … … …
(2) $\lambda\vec{u} = 0$ si, et seulement si, … … … ou … … …..
(3) Le vecteur $(-1)\vec{u}$ est noté … … ; c'est le seul vecteur tel que … … … … … . $= \vec{0}$.
On note $\vec{u} - \vec{v}$ le vecteur … … … … ….

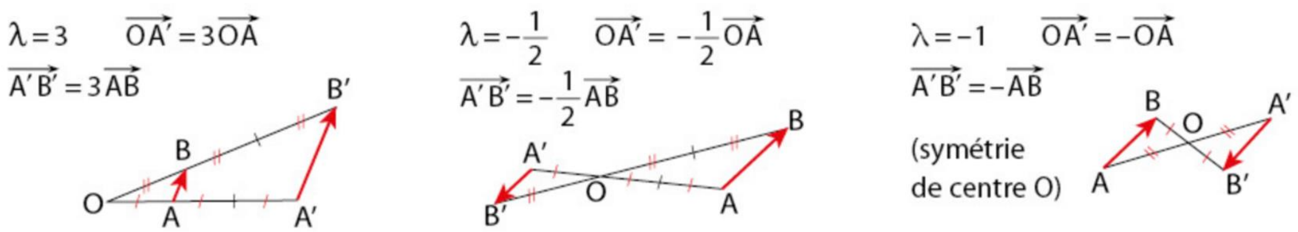
Conséquence de (3) : on sait que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{BA} =$ … … …



b) Homothéties et vecteurs

PROPRIÉTÉS – admises

Une homothétie de centre O et de rapport λ, transforme A en A' et B en B'.
Alors $\overrightarrow{OA'} =$ … …. , $\overrightarrow{OB'} =$ … …. et $\overrightarrow{A'B'} =$ … ….

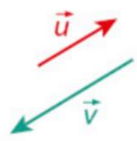


c) Colinéarité de vecteurs

DÉFINITIONS

• Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **…………** signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{v} =$ … …, autrement dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même ……………...

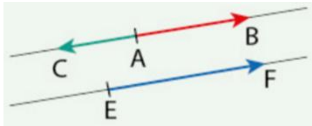
• Le vecteur nul est colinéaire à ……………...



PROPRIÉTÉS

• Trois points A, B et C sont **alignés** si, et seulement si, les vecteurs … …. et … …. sont **…………..**

• Deux droites (AB) et (EF) sont **parallèles** si, et seulement si, les vecteurs … … et …… sont **…………..**



Exercice 16 : résolu – Construire un vecteur somme

Dans un repère, on donne les points A(-3 ; 4) , B (0 ; 2), C(-6 ; 1) et D(-5 ; 2).

a) Placer le point E tel que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$. Déterminer les coordonnées du point E.

b) Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = -2\overrightarrow{AB}$. Déterminer les coordonnées du point F.

c) Les points D, E et F sont-ils alignés ?

À votre tour

Exercice 17

Dans un repère, on donne les points : A(1 ; -1) , B(2 ; 1) , C(4 ; -1) , D(6 ; -2)

a) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$. Déterminer les coordonnées du point E.

b) Placer le point F tel que $\overrightarrow{CF} = -3\overrightarrow{AB}$. Déterminer les coordonnées du point F.

c) Les points D, E et F sont-ils alignés ?

Exercice 18

Dans un repère, on donne les points : A(-2 ; -1) , B(2 ; 1) , C(0 ; 5) , D(3 ; 14)

1. a) Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$.
b) Calculer les coordonnées du point E.

2. a) F est l'image du point C par l'homothétie de centre A et de rapport 3.
Placer le point F.
b) Calculer les coordonnées du point F.

3. Les points A, F et D sont-ils alignés ?

Exercice 19

Dans un repère, on donne les points : A(0 ; 4) , B(-2 ; 1) , C(3 ; -1).

1. Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

2. Placer le milieu I du segment [CD] et déterminer les coordonnées du point I.

3. Placer le point J tel que $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BI}$ et déterminer les coordonnées du point J.

4. Déterminer le nombre réel k tel que $\overrightarrow{AJ} = k\overrightarrow{AD}$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 20

Dans un repère, on donne les points A(l ; 2), B(-3 ; O) et C(-14 ; a) où a désigne un nombre réel.

1. Exprimer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{BC}$ en fonction de a.

2. Déterminer la valeur de a pour laquelle les points A, B et C sont alignés.

➢ **Exercices 35 à 40 de la fiche d'exercices**