Chapitre 1 – Le second degré

I. Fonctions polynômes du second degré

A) Les fonctions $x \longmapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

Définition

Une **fonction polynôme du second degré** (ou de degré 2) est une fonction définie sur ……. par $f(x) =$ … … … … … … .. où a, b et c désignent des ………………… avec … … …..
On dit que f est donné sous **………………………..**

Exemple

• $f\,:\,x \longmapsto -2x^2 + 3x - 1$ est une fonction polynôme du second degré avec … … … … … … … … … … … ..

B) Fonctions polynômes du second degré sous forme factorisée

Propriété

Toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) =$ … … … … … … … où a, u, v désignent des nombres réels, $a \neq 0$, est une f……………………………..
On dit que f est donnée sous **…………………………..**

Démonstration : …..

Remarque : toute fonction polynôme du second degré n'admet pas une ………………………..

C) Avantages de la forme factorisée

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-u)(x-v)$ avec a, u, v nombres réels, $a \neq 0$

- **Équation $f(x) = 0$**

$a(x-u)(x-v) = 0$ si, et seulement si, … … … … … … … … … … … … … … … … … …. (car $a \neq 0$) c'est-à-dire $x =$ … … ou $x =$ … … …
Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ a pour solutions …. et ….. On dit que u et v sont les …………… (ou ……….) de f.

- **Somme et produit des racines**

On note $f(x) = ax^2 + bx + c$ la forme développée de f.
D'après légalité **(1)** ci-dessus, on a … … … … …. et … … … …., c'est-à-dire puisque $a \neq 0$,
$\boldsymbol{u + v} =$ … … (**somme des racines** de f) et $\boldsymbol{uv} =$ … …. (**produit des racines** de f).

- **Signe de $f(x)$**

Pour étudier le signe de $f(x)$, on dresse le tableau de signes ci-dessous (ici, on suppose que $u < v$).

Exemple

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -4(x+2)(x-1)$.

….

II. Résolution d'une équation du second degré

A) Forme canonique

Méthode de complétion du carré

On vérifie aisément que pour tous nombres réels $x \; et \; k$, $\boldsymbol{x^2 + kx = (x +} \; \ldots.)^2 - (\ldots.)^2$

Exemples

- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 8x + 9$.

Pour tout nombre réel x, $x^2 - 8x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ donc $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 6x + 1$.

Pour tout nombre réel x, $2x^2 + 6x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

donc $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$

De façon générale, on peut démontrer la propriété suivante.

Propriété - Définition

Toute fonction polynôme du second degré, définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, **admet pour forme canonique** :

$$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On pose $\boldsymbol{\Delta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$, c'est le **……………….** de la fonction polynôme du second degré.

Alors, la forme canonique de f s'écrit :

$$f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \qquad (\mathbf{2})$$

B) Résolution de l'équation $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ avec $\boldsymbol{a \neq 0}$

- **1[er] cas : $\boldsymbol{\Delta > 0}$**

D'après **(2)**, pour tout nombre réel x,

$$f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\ldots.}{\ldots.}\right)^2\right) = \left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \ldots\ldots.\right)\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right) + \ldots\ldots.\right)$$

$$= \left(x + \frac{b}{2a} - \ldots\ldots.\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \ldots\ldots.\right)$$

$$= (x + \ldots\ldots\ldots..)(x + \ldots\ldots..\ldots.)$$

L'équation $f(x) = 0$ admet donc deux solutions distinctes :

$$x_1 = \ldots\ldots\ldots\ldots.. \text{ et } x_2 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

- **2ème cas : $\boldsymbol{\Delta = 0}$**

Pour tout nombre réel x, $f(x) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$.
Par conséquent, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \Leftrightarrow x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$
L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution : $x_0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

- **3ème cas : $\boldsymbol{\Delta < 0}$**

$-\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ et $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ donc $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$
L'équation $f(x) = 0 = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

Propriété

Signe de Δ	**$\Delta > 0$**	**$\Delta = 0$**	**$\Delta < 0$**
Solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$			

Dans le cas où $\Delta = 0$, l'unique solution x_0 est appelée …………………….. de f (dans ce cas $x_1 = x_2$).

III. Factorisation et signe de $ax^2 + bx + c$

f est une fonction polynôme du second degré définie sur par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac$.

A) Forme factorisée d'une fonction polynôme du second degré

On déduit immédiatement du paragraphe I.B) la propriété suivante.

Propriétés

- Si $\Delta > 0$, alors pour tout nombre réel x, $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$ où ….. et …… sont les ………. de f.
- Si $\Delta = 0$, alors pour tout nombre réel x, $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ où … … est la ……………….. de f.

Remarque : si $\Delta < 0$, on ne retient pas de forme factorisée pour $f(x)$.

B) Somme et produit des racines

On déduit immédiatement du paragraphe I.C) la propriété suivante.

Propriété

Si l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet deux solutions x_1 et x_2, alors : $x_1 + x_2 = \ldots\ldots..$ et $x_1 \times x_2 = \ldots\ldots$

Exemple

L'équation $3x^2 - 5x + 1 = 0$ a deux solutions distinctes car $\Delta = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$ ………………….

- Sans calculer ces solutions, on sait que leur somme est $S = \ldots\ldots$ et que leur produit est $P = \ldots\ldots$

C) Signe de $ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$

- **1^er^ cas : $\Delta > 0$**

Pour tout x, $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
D'après l'étude du signe de $f(x)$ faite au paragraphe I.C) on obtient le tableau de signes ci-dessous (on suppose $x_1 < x_2$).

$\boldsymbol{x}$	
Signe de $\boldsymbol{f(x)}$	

- **2ème cas : $\Delta = 0$**

Pour tout x, $f(x) = ax^2 + bx + c =$ … … … … … … … ..
Le signe de $ax^2 + bx + c$ est le signe de … … … sauf pour $x = x_0$ où $ax^2 + bx + c$ s'annule.

- **3ème cas : $\Delta < 0$**

Pour tout nombre réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c =$ … … … … … … … … … ….
Or $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$ … … … … … donc le signe de $ax^2 + bx + c$ est celui de ………

Propriété

<table>
<tr><td>Signe de Δ</td><td>$\Delta > 0$</td><td>$\Delta = 0$</td><td>$\Delta < 0$</td></tr>
<tr><td>Signe de
$f(x) = ax^2 + bx + c$</td>
<td><table><tr><td>$\boldsymbol{x}$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_1</td><td></td><td>x_2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{f(x)}$</td><td></td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de $-a$</td><td>0</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>$\boldsymbol{x}$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>x_0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{f(x)}$</td><td></td><td>signe de a</td><td>0</td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td>
<td><table><tr><td>$\boldsymbol{x}$</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$\boldsymbol{f(x)}$</td><td></td><td>signe de a</td><td></td></tr></table></td></tr>
</table>