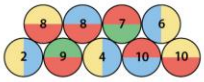
Chapitre 2 – Probabilités
Fiche d'exercices

Activité d'introduction n°1



Une urne contient neuf boules bicolores numérotées :
– trois sont jaunes et bleues et chacune est numérotée 2, 4 ou 6 ;
– deux sont jaunes et rouges et chacune est numérotée 8 ou 10 ;
– deux sont rouges et vertes et chacune est numérotée 7 ou 9 ;
– deux sont bleues et rouges et chacune est numérotée 8 ou 10.
On tire au hasard une boule de cette urne, et on note respectivement :
– A l'événement « la boule tirée ne porte pas de vert » ;
– B l'événement « la boule tirée porte du jaune et du bleu » ;
– C l'événement « la boule tirée porte du jaune ou du bleu » ;
– D l'événement « la boule tirée porte du rouge et ne porte pas de vert » ;
– E l'événement « la boule tirée ne porte pas de rouge » ;
– F l'événement « la boule tirée ne porte pas de jaune ou porte un numéro au moins égal à 7 ».

1. Préciser le nombre d'issues composant chacun des événements A, B, C, D, E .

2. Associer à chacun des événements A, B, C, D, E sa description, à choisir parmi les trois suivantes :
– « la boule tirée porte un numéro pair » ;
– « la boule tirée porte le n° 8 ou le n° 10 » ;
– « la boule tirée porte un numéro au plus égal à 6 ».

3. a. L'issue « la boule tirée est jaune et rouge et porte le numéro 8 » est-elle dans F ?
b. Quel(s) événement(s) A, B, C, D ou E est (sont) constitué(s) de l'ensemble des issues qui ne sont pas dans F ?

Dans cet exemple, on considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu classique de 32 cartes.

Exemple 1 Événement et événement contraire

L'univers de cette expérience est composé de 32 issues : « Tirer le roi de pique » est une de ces issues.

• L'événement A « La carte tirée est un as » est composé de quatre issues puisqu'il y a quatre as dans le jeu.

• L'événement contraire de A est $\overline{A}$ « Tirer une carte qui n'est pas un as » et cet événement est composé de $32-4=28$ issues.

12 Deux élèves sont choisis au hasard dans une classe. Dans chaque cas, décrire l'événement contraire de l'événement donné, sans utiliser de négation.

a. « Les deux élèves sont des filles. »
b. « Les deux élèves sont une fille et un garçon. »
c. « Au moins un des deux élèves est un garçon. »

13 Si on tire deux cartes dans un jeu classique de 32 cartes, les événements « Les deux cartes sont des as » et « Aucune des deux cartes n'est un as » sont-ils contraires ? Expliquer.

14 Si on tire deux cartes au hasard et sans remise dans un jeu de 32 cartes classique, quel est le contraire de l'événement « Au moins une des deux cartes est un cœur ou un roi et l'autre n'est pas un cœur » ?

15 Yannis a lancé cinq fois une pièce de monnaie équilibrée. Soit N le nombre de fois où Yannis a obtenu « Pile ».

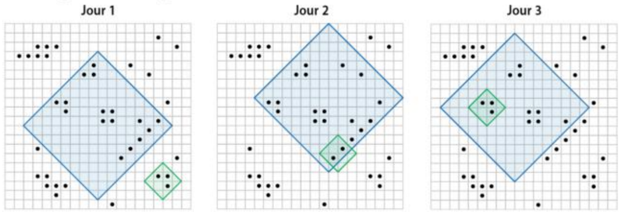
1. Si possible, associer à chacun des cinq événements : $\{N<2\}$, $\{N\leqslant 2\}$, $\{N>2\}$, $\{N\geqslant 2\}$ et $\{N\leqslant 1\}$ sa description, à choisir parmi les propositions suivantes :

ⓐ Il a obtenu au moins deux fois « Pile »;
ⓑ Il a obtenu moins de deux fois « Pile »;
ⓒ Il a obtenu au plus deux fois « Pile »;
ⓓ Il a obtenu plus de deux fois « Pile ».

2. Parmi les cinq événements de la question précédente, dire lesquels sont contraires et lesquels sont égaux.

Activité d'introduction n°2

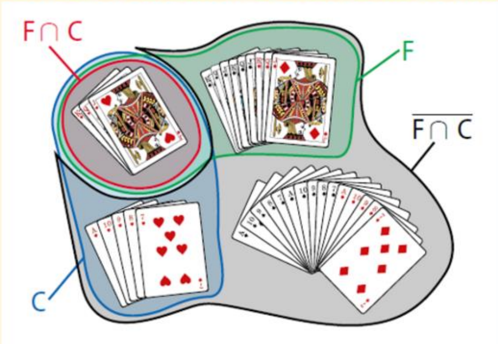
Deux nuages de fumées toxiques A et B survolent une région carrée, de côté 1 km. Ces nuages sont modélisés par deux carrés d'aires 0,02 km^2 et 0,32 km^2 respectivement représentés en vert et en bleu sur chacune des figures ci-dessous. Ces figures indiquent leurs positions durant trois jours consécutifs.
Les zones de la région survolées par un seul des deux nuages sont placées en « alerte orange » et celles survolées par les deux nuages en « alerte rouge ». Les autres zones sont dites « calmes ».



1. Préciser les aires en km^2 des zones respectivement en « alerte orange », en « alerte rouge » et « calmes » pour chaque jour.

2. Ces nuages s'avèrent particulièrement dangereux pour les animaux. Un chien errant parcourt la région pendant ces trois jours. Ignorant le danger, il élit domicile au hasard chaque jour dans une des 40 granges de cette zone, qui sont représentées par des points • sur chacune des trois figures.
a. Quelles sont les probabilités respectives que ce chien se trouve dans une zone en « alerte orange », « rouge » ou « calme », chacun des trois jours ?
b. Si ce chien reste les trois jours dans la même grange, quelle est la probabilité qu'il se trouve chaque jour dans une zone « calme » ?

Exemple 2 Union et intersection de deux événements, événement contraire



Soit F et C les événements « La carte tirée est une figure (un roi, une dame ou un valet) » et « La carte tirée est un cœur ».
L'événement $F\cap C$ correspond à « La carte tirée est une figure et un cœur », et son contraire $\overline{F\cap C}$ est « La carte tirée n'est pas une figure ou n'est pas un cœur ».

En effet, les issues qui composent $\overline{F\cap C}$ sont celles qui ne sont pas à la fois dans F et dans C, autrement dit celles qui ne sont pas dans F ou celles qui ne sont pas dans C.
Ainsi, $\overline{F\cap C}=\overline{F}\cup\overline{C}$.

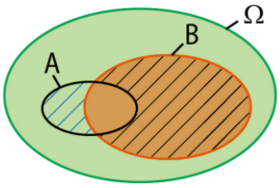
Pour les exercices 18 et 19, on considère une pépinière composée de 720 plants, 80 % des arbres sont des conifères, 60 % des arbres sont âgés de moins de deux ans dont 300 sont des conifères.
Nicolas le jardinier choisit un arbre au hasard et on note C l'événement « Cet arbre est un conifère » et D l'événement « Cet arbre est âgé de moins de deux ans ».

18 **1.** Donner les probabilités des événements C, D et $C\cap D$.
2. En déduire les probabilités des événements $C\cup D$ et $\overline{C\cup D}$.

19 Calculer la probabilité $P\left(D\cap\overline{C}\right)$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

20 Soit A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire et tels que $P(\mathrm{A})=0{,}2$; $P(\mathrm{B})=0{,}6$ et $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}12$.

Calculer les probabilités :



a. $P\left(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}\right)$

b. $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$

c. $P\left(\overline{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}\right)$

d. $P\left(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}\right)$

Exemple 3 Équiprobabilité et formule du crible

Avec les notations de l'Exemple 2, il y a 8 cœurs et $4\times3=12$ figures dans le jeu. Ainsi, l'événement C est composé de 8 issues et l'événement F est constitué de 12 issues. Comme les cartes ont toutes la même probabilité d'être tirées (c'est la situation qui sous-entend cette hypothèse d'équiprobabilité), on a :

$$P(\mathrm{C})=\frac{8}{32}=\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(\mathrm{F})=\frac{12}{32}=\frac{3}{8}.$$

Or, il y a 3 cartes qui sont des figures et des cœurs, donc $P(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})=\frac{3}{32}$.

D'après la formule du crible :

$$P(\mathrm{F}\cup\mathrm{C})+P(\mathrm{F}\cap\mathrm{C})=P(\mathrm{F})+P(\mathrm{C}),$$

soit $P(\mathrm{F}\cup\mathrm{C})+\frac{3}{32}=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}$, d'où $P(\mathrm{F}\cup\mathrm{C})=\frac{1}{4}+\frac{3}{8}-\frac{3}{32}$,

puis $P(\mathrm{F}\cup\mathrm{C})=\frac{8+12-3}{32}=\frac{17}{32}$.

On peut contrôler la valeur du numérateur avec le dénombrement : $\mathrm{F}\cup\mathrm{C}$ est composé des 8 issues de C et des $3\times3=9$ issues qui sont dans F mais pas dans C (car on les a déjà comptabilisées), soit 17 issues.

Dans les exercices 25 et 26, A et B sont deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.

25 Si $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}2$, $P(\mathrm{A})=0{,}7$ et $P(\mathrm{B})=0{,}3$, que vaut $P(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})$?

26 Pourquoi n'est-il pas possible d'avoir à la fois :
$P(\mathrm{A})=0{,}8$, $P(\mathrm{B})=0{,}6$ et $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})=0{,}3$?

27 Dans un groupe de 20 adolescents pratiquant tous le football ou le rugby, 15 pratiquent le football et 8 pratiquent le rugby. Si on choisit un de ces adolescents au hasard, quelle est la probabilité qu'il pratique le football et le rugby ?

28 Dans le lycée de Yasmina, 35 % des élèves de 1re ont choisi la spécialité mathématiques, 15 % ont choisi les spécialités mathématiques et physique-chimie et 70 % ont choisi au moins une de ces deux spécialités.
Yasmina affirme que la moitié des élèves de 1re de son lycée ont choisi la spécialité physique-chimie. A-t-elle raison ?

Livre page 323

Comment ça fonctionne ?

Pour les trois exemples, on considère la situation et l'expérience aléatoire suivantes : à un devoir commun, en 1re A, 18 des 30 élèves ont eu la moyenne et en 1re B, 24 des 35 élèves ont eu la moyenne.
On choisit un des élèves de ces deux classes au hasard. Soit M l'événement « Cet élève a eu la moyenne » et A l'événement « Cet élève est en 1re A ».

Exemple 2 Probabilité d'un événement sachant un autre événement

– Par définition, puisque $P(\mathrm{A})$ est non nulle, le nombre $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ existe et il est égal à la probabilité que l'élève choisi au hasard ait eu la moyenne, sachant qu'il est en 1re A.

Remarque : Bien distinguer les probabilités $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})$ et $P(\mathrm{A}\cap\mathrm{M})$: la première est une probabilité conditionnelle et l'autre la probabilité d'une intersection.

Toujours par définition :

$$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{M})}{P(\mathrm{A})}=\frac{\frac{18}{65}}{\frac{30}{65}}=\frac{18}{65}\times\frac{65}{30}=\frac{18}{30}=\frac{3}{5}.$$

Méthode : On peut remarquer que $P_{\mathrm{A}}(\mathrm{M})=\frac{18}{30}$ est la proportion des élèves ayant eu la moyenne parmi les élèves de 1reA (voir le tableau dans l'Exemple 1).
Cette remarque peut être utilisée en pratique à partir des données de l'énoncé.

– De même, puisque $P(\mathrm{M})$ est non nulle, le nombre $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{A})$ existe et il est égal à la probabilité que l'élève choisi au hasard soit en 1re A, sachant qu'il a eu la moyenne. On a donc $P_{\mathrm{M}}(\mathrm{A})=\frac{P(\mathrm{A}\cap\mathrm{M})}{P(\mathrm{M})}=\frac{18}{42}=\frac{3}{7}$.

Pour s'entraîner ➥ Exercices 23 à 26, p. 331

Exercices page 331

Reconnaître des probabilités conditionnelles

Dans les exercices 23 à 26, on choisit au hasard une personne dans une population et on note respectivement L et V les événements « Cette personne porte des lunettes » et « Cette personne a les yeux verts ».

Dans chaque exercice :

a. indiquer parmi les probabilités $P(L)$, $P(V)$, $P_L(V)$, $P_V(L)$ et $P(L \cap V)$ celles qui sont données dans l'énoncé ;

b. calculer la probabilité demandée.

23 Dans la population A, 10 % des personnes ont les yeux verts et portent des lunettes et 25 % des personnes qui portent des lunettes ont les yeux verts. Quelle est la probabilité que la personne choisie porte des lunettes ?

Corrigé détaillé ➥ p. 385

24 Dans la population B, 20 % des personnes portent des lunettes, dont 15 % ont les yeux verts. Quelle est la probabilité que la personne choisie ait des yeux verts et porte des lunettes ?

Corrigé détaillé ➥ p. 385

25 Dans la population C, 12 % des personnes ont les yeux verts et 5 % portent des lunettes et ont les yeux verts. Si la personne choisie a les yeux verts, quelle est la probabilité qu'elle porte des lunettes ?

26 Dans la population D, 9 % des personnes portent des lunettes et 30 % des personnes ont les yeux verts, parmi lesquelles 24 % portent des lunettes. Si la personne choisie porte des lunettes, quelle est la probabilité qu'elle ait les yeux verts ?

Comment ça fonctionne ?

Pour les trois exemples, on considère la situation et l'expérience aléatoire suivantes : à un devoir commun, en 1re A, 18 des 30 élèves ont eu la moyenne et en 1re B, 24 des 35 élèves ont eu la moyenne.
On choisit un des élèves de ces deux classes au hasard. Soit M l'événement « Cet élève a eu la moyenne » et A l'événement « Cet élève est en 1re A ».

Exemple 1 Indépendance de deux événements

On peut dresser un tableau à double entrée pour synthétiser ces informations. On a, d'une part, $P(A \cap M) = \frac{18}{65}$

et, d'autre part, $P(A) = \frac{30}{65} = \frac{6}{13}$ et $P(M) = \frac{18+24}{65} = \frac{42}{65}$,

donc $P(A) \times P(M) = \frac{6}{13} \times \frac{42}{65} = \frac{252}{845}$.

Comme $P(A) \times P(M) \neq P(A \cap M)$, A et M sont non indépendants.

	A	$\overline{A}$	Total
M	18	24	42
$\overline{M}$	12	11	23
Total	30	35	65

Pour s'entraîner ➥ Exercices 9 à 12, p. 330

Calculer les probabilités d'événements indépendants ou non indépendants

Dans les exercices 9 à 12, A et B sont deux événements indépendants relatifs à une même expérience aléatoire. On donnera les probabilités sous forme de fractions irréductibles.

9 **1.** Dans chaque cas, calculer $P(A \cap B)$:

a. si $P(A) = \frac{2}{3}$ et $P(B) = \frac{3}{4}$;

b. si $P(A) = \frac{9}{10}$ et $P(B) = \frac{5}{6}$.

2. Dans chaque cas, calculer $P(A)$:

a. si $P(B) = \frac{5}{6}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{2}$;

b. si $P(B) = \frac{2}{3}$ et $P(A \cap B) = \frac{8}{15}$.

Corrigé détaillé ➥ p. 385

10 On suppose que $P(A) = \frac{4}{5}$ et $P(B) = \frac{5}{8}$.

Calculer $P(A \cap B)$, puis en déduire $P(A \cup B)$ à l'aide de la formule du crible.

11 On suppose que $P(A) = \frac{4}{5}$ et $P(B) = \frac{3}{4}$.

1. Calculer $P(A \cap \overline{B})$.

2. Justifier l'indépendance de $\overline{A}$ et $\overline{B}$, puis calculer $P(\overline{A} \cap \overline{B})$.

Corrigé détaillé ➥ p. 385

12 On suppose que $P(\overline{A}) = \frac{7}{10}$ et $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$.

Montrer que $P(B) = \frac{2}{3}$.

Exercices page 325

Comment ça fonctionne ?

Dans les exemples 1 et 2, on prélève au hasard un bonbon dans un sachet contenant 40 % de bonbons à la fraise dont 30 % sont acidulés. Les bonbons qui ne sont pas à la fraise sont à la menthe et $\frac{9}{10}$ d'entre eux ne sont pas acidulés. On note respectivement A et F les événements « Le bonbon prélevé est acidulé » et « Le bonbon prélevé est à la fraise ».

Exemple 3 Notion d'épreuves identiques et indépendantes

Le lancer de deux dés équilibrés à six faces est assimilable à deux tirages au hasard d'une boule dans une urne contenant six boules, numérotées de 1 à 6, avec remise, c'est-à-dire à deux épreuves identiques et indépendantes. Ainsi, par exemple, la probabilité d'obtenir la suite de résultats : 1, puis 4 est $\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.

Remarque : Ainsi, d'autres expériences aléatoires que des tirages « avec remise » peuvent être modélisées de la même façon.

20 On tire deux cartes au hasard, successivement et avec remise dans un jeu de 32 cartes classique.
Soit les événements C « La première carte est un cœur » et F « La seconde carte est un roi, une dame ou un valet ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant cette situation.

2. Calculer $P(C\cap F)$ et $P(\overline{C}\cap\overline{F})$.

21 On choisit au hasard et successivement deux personnes dans une population composée de 10 % de gauchers. On suppose cette population suffisamment nombreuse pour assimiler ces choix à deux tirages avec remise.

Soit les événements G_1 « La première personne est gauchère » et G_2 « La seconde personne est gauchère ».
À l'aide d'un arbre pondéré, déterminer la probabilité de l'événement « Une seule de ces deux personnes est gauchère ».

Comment ça fonctionne ?

Dans les exemples 1 et 2, on prélève au hasard un bonbon dans un sachet contenant 40 % de bonbons à la fraise dont 30 % sont acidulés. Les bonbons qui ne sont pas à la fraise sont à la menthe et $\frac{9}{10}$ d'entre eux ne sont pas acidulés. On note respectivement A et F les événements « Le bonbon prélevé est acidulé » et « Le bonbon prélevé est à la fraise ».

Exemple 1 Partition de l'univers

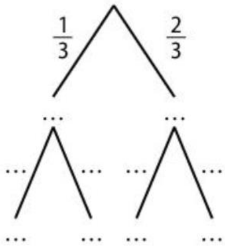
Dans cette expérience, on peut considérer les partitions $\{A,\overline{A}\}$ ou bien $\{F,\overline{F}\}$. Les trois données numériques de l'énoncé se traduisent par $P(F)=\frac{40}{100}=0{,}4$, $P_F(A)=0{,}3$ et $P_{\overline{F}}(\overline{A})=0{,}9$.

Comme $P(F)$ est connue, contrairement à $P(A)$, on choisit la partition $\{F,\overline{F}\}$ comme partition de l'univers.

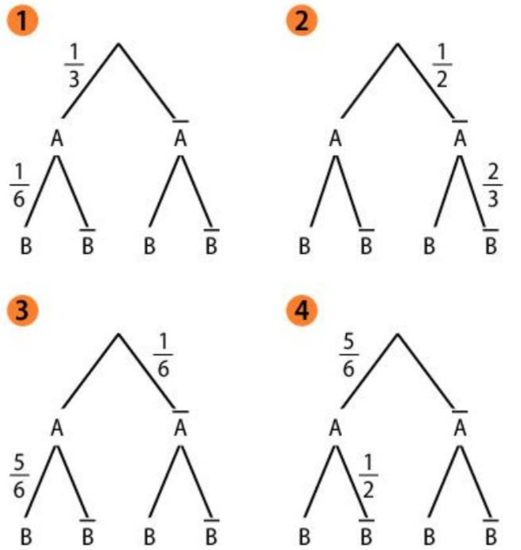
Pour s'entraîner ➥ Exercices 18 p. 330 et 19 p. 331

Utiliser un arbre pondéré

18 On lance deux fois un dé cubique équilibré dont une face est numérotée 1, deux faces numérotées 2 et trois faces numérotées 3.
Soit M l'événement « On a obtenu moins de deux fois le numéro 2 ».
Décrire l'événement contraire de M, puis en s'aidant de l'arbre ci-contre, calculer $P(\overline{M})$, puis $P(M)$.



19 On lance deux fois un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Chacun des quatre arbres ci-dessous modélise une situation où A est le résultat du premier lancer et B celui du second lancer.



1. Associer à chaque arbre une paire $\{A,B\}$, en précisant A et B, chacun étant choisi parmi les événements suivants :
– « Le résultat est pair » ;
– « Le résultat est différent de 1 » ;
– « Le résultat est un multiple de 3 » ;
– « Le résultat est 6 ».

2. Recopier et compléter ces arbres puis, dans chaque cas, calculer $P(A\cap B)$ et $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

Exemple 2 Formule des probabilités totales et règle de la somme

L'objectif est de calculer la probabilité que le bonbon prélevé soit acidulé, soit $P(A)$. En pratique, on peut construire un arbre pondéré illustrant les données, compte tenu du choix de la partition $\{F,\overline{F}\}$. D'après la règle de la somme, on a $P(\overline{F})=1-P(F)=0{,}6$. De même, $P_F(\overline{A})=1-P_F(A)=0{,}7$ et $P_{\overline{F}}(A)=1-P_{\overline{F}}(\overline{A})=0{,}1$.