Suites numériques

I. Généralités sur les suites

Définition

Une suite est une ……………… u définie sur $\mathbb{N}$ ou sur un ensemble $\{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$ fixé (c'est-à- dire pour tous les entiers à partir d'un entier n_0), qui à tout entier naturel n associe un réel $\boldsymbol{u(n)}$**,** noté $\boldsymbol{u_n}$.

Notation

La suite est notée … .. ou … … … ..ou … … … … …. ou u.
u_n est le …………………… de la suite, ou le terme de …………….

Exemples

- La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = n^2 - 1$. Le premier terme est … … … … … … … … ..
- La suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 6$ par $u_n = \frac{1}{n-5}$. Le premier terme est … … … … … … …
- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n^2}$

Remarque

Dans les deux premiers exemples, on a l'expression de u_n en fonction de n.
On peut calculer directement n'importe quel terme en remplaçant n par le rang souhaité.
Dans ces cas, la suite est dite définie par une formule …………………….

Exemple

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2^n$.
On a alors $u_0 =$ … … … … … .. ; $u_{10} =$ … … … … … … … ….

Exercices résolus : 1 et 2 page 56 et 57 Sésamath

Définition - Suite définie par une relation de récurrence

Définir une suite par une relation de récurrence, c'est donner un ou plusieurs premiers termes et une relation permettant de calculer un terme à partir …………………………………………………

Remarque

- Il n'est pas toujours facile d'avoir une formule explicite d'une suite définie par récurrence.
- Il ne faut pas confondre u_{n+1} qui désigne le terme suivant u_n , et $u_n + 1$, qui désigne le terme u_n auquel on ajoute 1 .

Exemple

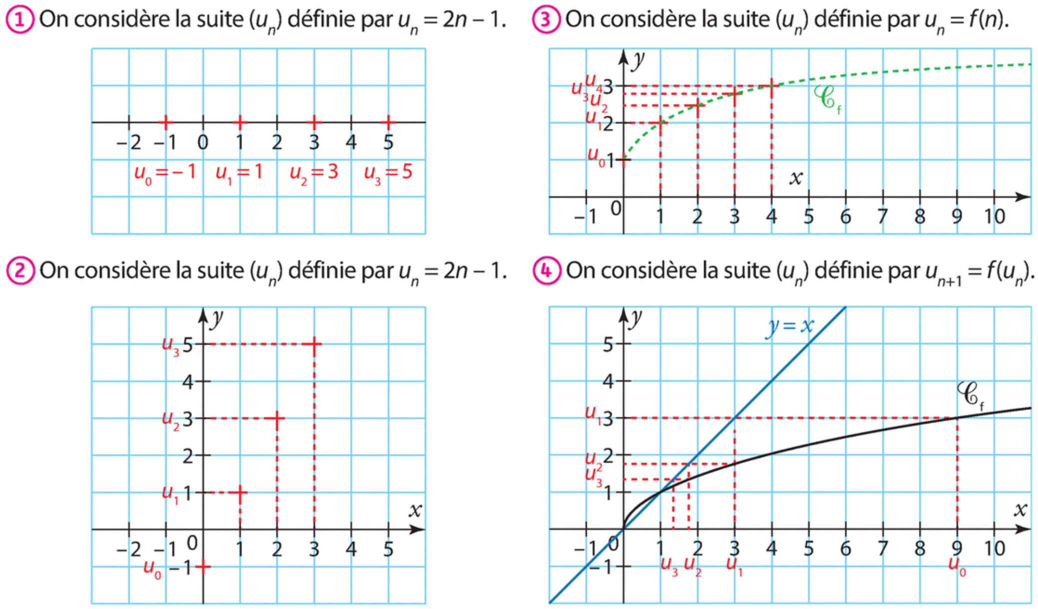
La suite (u_n) définie par $u_0 = -6$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 3u_n + 15$.
Pour $n = 0$, on a … … … … … … … … … … …., c'est-à-dire … … … … … … … … … … … … … ..
Pour $n = 1$, on a … … … … … … … … … … …., c'est-à-dire … … … … … … … … … … … … …..
Pour calculer un terme, on doit connaître le précédent. Par exemple $u_{20} =$ … … … … …..

Exercice résolu : 2 page 57

Règles - Représentations graphiques

❶ Sur une droite graduée, on place les réels d'abscisses u_0 ; u_1 ; u_2 ; ...
❷ Dans un repère, on place les points de coordonnées $(n\,;\,u_n)$.
❸ Si la suite est définie par $u_n = f(n)$, alors u_n est l'ordonnée du point d'abscisse n de la courbe représentative de la fonction f.
❹ Si la suite est définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, alors on construit les termes à l'aide de la courbe de représentative de la fonction f et de la droite d'équation $y = x$.

Exemple

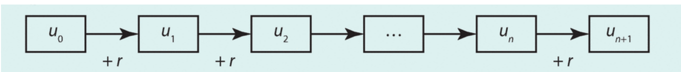


Exercice résolu : n°4 page 59

II. Suites arithmétiques

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait … … … … … … … … … … … .



Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 3$ est la suite arithmétique de raison $r =$ … …. et de premier terme … … … … … ...
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0{,}5$.
  On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n +$ … … … donc (v_n) est la suite arithmétique de raison $r =$ … … .. et de premier terme ………….

<u>Remarque</u>
Pour démontrer qu'une suite (u_n) est arithmétique, on peut chercher à montrer que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, ….

Propriété - Expression du terme général

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n} =$ … … … … … … … … … ….
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n} =$ … … … … … … … … … ….
Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n} = \boldsymbol{u_p} +$ … … … … … ….

Démonstration

…

Exemple

Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n - 0{,}5$.

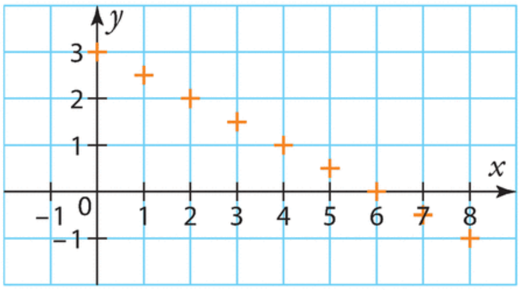
…

Règle - Représentation graphique

Les points de sa représentation graphique se situent sur la droite d'équation $y = r \times x + u_0$.
On parle **d'évolution linéaire**.

Exemple

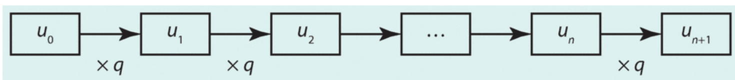
Soit la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = 3 - 0{,}5n$



III. Suites géométriques

Définition

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q, appelé raison de la suite, tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait … … … … … … … … … … … … …



Exemples

- La suite (u_n) définie par $u_0 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2 \times u_n$ est la suite géométrique de raison $q =$ … … et de premier terme $u_0 =$ … ….
- La suite (v_n) définie par $v_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{v_n}{3}$.
  Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} =$ … …. donc (v_n) est la suite géométrique de raison $q =$ … …. et de premier terme … … … ..

<u>Remarques</u>

- Pour démontrer qu'une suite (u_n) est géométrique, il faut montrer que … … … … … … … … … ….
  Si les termes sont non nuls, on peut aussi chercher à montrer que le quotient … … … … est égal à une ……………………….
- La variation relative entre deux termes consécutifs est ………………

Propriété - Expression du terme général

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n} =$ … … … … … ….

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n} =$ … … … … … ….

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{u_n} =$ … … … … … ..

Démonstration

….

Exemple

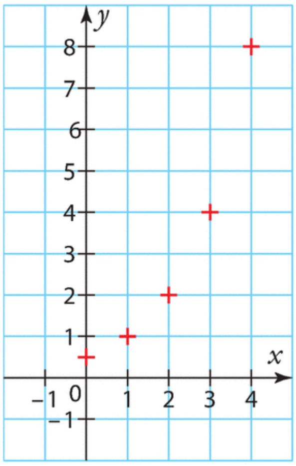
Soit (v_n) la suite définie par $v_0 = 0{,}5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2 \times v_n$.
Cette suite est géométrique de raison $q =$ … … et de premier terme $v_0 =$ … …. (voir l'exemple précédent).
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n =$ … … … … … … … …

Règle - Représentation graphique

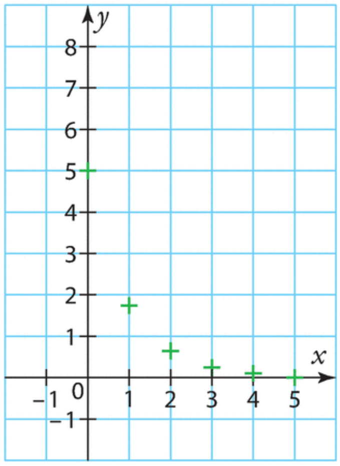
Pour les représentations graphiques des suites géométriques, on parle **d'évolution …………………**

Exemple

① Soit (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0{,}5 \times 2^n$.



② Soit (v_n) définie par $v_0 = 5$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_{n+1} = \dfrac{v_n}{3}$



IV. Calcul de sommes

Propriété – Somme des n premiers termes

Pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + \cdots +} \boldsymbol{n} = \text{… … … … … … …}$$

Démonstration

…

Conséquences :

Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 alors :

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = \underbrace{u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n}_{(n+1)\ termes} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Ou plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $p < n$,

$$\sum_{i=p}^{n} u_i = \underbrace{u_p + u_{p+1} + u_{p+2} + \cdots + u_n}_{(n-p+1)\ termes} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \times \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Propriété – Somme de n premières puissances

Pour tout réel $q \neq 1$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\mathbf{1 + q + q^2 + \cdots + q^n} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration

… ..

Conséquences :

Si (v_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 alors :

$$\sum_{i=0}^{n} v_i = \underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_n}_{(n+1)\ termes} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

Ou plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que $p < n$,

$$\sum_{i=p}^{n} v_i = \underbrace{v_p + v_{p+1} + v_{p+2} + \cdots + v_n}_{(n-p+1)\ termes} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$