

Trigonométrie

Fiche d'exercices (Sésamath page 208)

• Se repérer sur le cercle trigonométrique

Pour les exercices 26 et 27, on considère un cercle trigonométrique de centre O dans un repère orthonormé (O ; I, J) et les points A(-1 ; 0) et B(0 ; -1).

26 1. Donner les points du cercle associés à chacun des réels suivants.

a) 0 b) π c) 4π d) 56π

2. Donner les points du cercle associés aux réels suivants.

a) 155π b) 70π c) $-1\,043\pi$ d) -588π

27 1. Donner les points du cercle associés à chacun des réels suivants.

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{5\pi}{2}$ c) $\frac{11\pi}{2}$ d) $-\frac{13\pi}{2}$

2. Donner les points du cercle associés aux réels suivants.

a) $\frac{67\pi}{2}$ b) $-\frac{37\pi}{2}$ c) $\frac{498\pi}{2}$ d) $-\frac{117\pi}{2}$

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{5\pi}{2}$ c) $\frac{11\pi}{2}$ d) $-\frac{13\pi}{2}$

• Déterminer le sinus et le cosinus d'un réel

28 1. À partir de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, déterminer $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ puis $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

2. Même question avec $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

29 1. À partir de $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$, déterminer $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ puis $\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Même question avec $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. En déduire $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$ et $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$.

31 Placer sur le cercle trigonométrique les points associés aux réels suivants, puis déterminer le sinus et le cosinus de chaque réel.

a) $\frac{\pi}{6}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{5\pi}{6}$

d) $\frac{13\pi}{6}$ e) $-\frac{3\pi}{4}$ f) $-\frac{11\pi}{3}$

• Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique

34 1. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

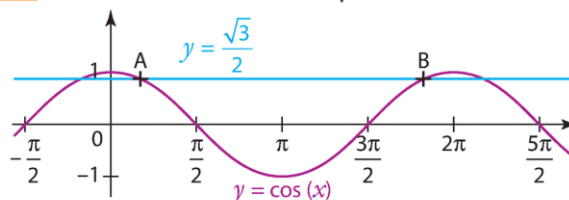
35 1. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ l'inéquation $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$.

36 1. Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\cos(x) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Résoudre dans $]\pi ; 3\pi]$ l'inéquation $\sin(x) > -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

37 1. Donner les abscisses des points A et B.



2. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'équation $\cos(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Résoudre sur $[0 ; 2\pi[$ l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Exploiter les propriétés des fonctions sinus et cosinus

39 1. Soit f une fonction paire.

Pour tout réel x , calculer $f(x) - f(-x)$.

2. En déduire que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + \cos(x)$ est paire.

40 1. Soit g une fonction impaire. Pour tout réel x , calculer $g(x) + g(-x)$.

2. En déduire que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x + \sin(x)$ est impaire.

41 Dans chaque cas, vérifier que la fonction f est T -périodique.

a) $f : x \mapsto \cos(2\pi x)$ et $T = 1$

b) $f : x \mapsto \sin(3x)$ et $T = \frac{2\pi}{3}$

c) $f : x \mapsto \frac{2}{3} \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right)$ et $T = \frac{2\pi}{7}$

d) $f : x \mapsto \frac{10}{7} \sin\left(\frac{5x-8}{3}\right)$ et $T = \frac{6\pi}{5}$

42 Soit trois fonctions f , g et h définies sur \mathbb{R} par $f(x) = \sin(2x)$; $g(x) = 2\sin(x)$ et $h(x) = \sin^2(x)$.

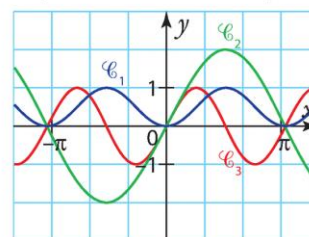
1. Montrer que f et g sont impaires.

Interpréter graphiquement.

2. Montrer que h est paire.

Interpréter graphiquement.

3. f , g et h sont représentées dans le repère ci-dessous.



Associer à chaque fonction sa courbe représentative. Justifier.

Exercices d'entraînement

47 1. Tracer le cercle trigonométrique et placer le point A associé au réel $\frac{\pi}{3}$.

2. Placer le point B, symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses.

Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0; 2\pi[$, puis dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

3. Placer le point C, symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées.

Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0; 2\pi[$, puis dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

4. Placer le point D, symétrique de A par rapport à O.

Donner les réels associés à ce point dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ puis dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

53 On considère l'algorithme suivant écrit en langage PYTHON.

Algo & Prog

```
def diveuclide(a,b):
    while a>b:
        a=a-b
    return a
```

1. Que calcule cet algorithme ?

2. Calculer `diveuclide(125, 26)`.

3. Calculer `diveuclide(43, 6)` et en déduire l'image du réel $\frac{43\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

4. En déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{43\pi}{3}\right)$ et de $\sin\left(\frac{43\pi}{3}\right)$.

54 1. a) Déterminer un réel x appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ associé à $\frac{91\pi}{4}$.

b) En déduire $\cos\left(\frac{91\pi}{4}\right)$ puis $\sin\left(\frac{91\pi}{4}\right)$.

2. a) Calculer $\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)$.

b) Calculer $\sin\left(-\frac{81\pi}{2}\right)$.

3. a) Calculer $\cos\left(\frac{25\pi}{3}\right)$ et en déduire $\sin\left(\frac{25\pi}{3}\right)$.

b) Calculer $\sin\left(\frac{45\pi}{6}\right)$ et en déduire $\cos\left(\frac{45\pi}{6}\right)$.

57 1. Soit k un entier relatif. Montrer que résoudre l'inéquation $-\pi < -\frac{53\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$ revient à résoudre l'inéquation

$$\frac{49}{4} < 2k \leq \frac{57}{4}.$$

2. En déduire l'entier relatif k tel que $-\pi < -\frac{53\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi$.

3. En déduire un réel x appartenant à l'intervalle $]-\pi; \pi]$ associé à $-\frac{53\pi}{4}$.

59 1. Résoudre sur $[0; 2\pi[$ l'équation $2\cos(x) = 1$.

2. Résoudre sur $[0; 2\pi[$ l'équation $2\sin(x) = -1$.

64 On considère l'inéquation suivante, d'inconnue réelle x :

$$(H) : \sin^2(x) - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\sin(x) - \frac{\sqrt{3}}{4} \geq 0. \text{ On pose } X = \sin(x).$$

1. Résoudre sur \mathbb{R} l'inéquation $X^2 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{4} \geq 0$.

2. En déduire les solutions de l'inéquation (H).

66 Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 \cos(x)$.

Algo & Prog

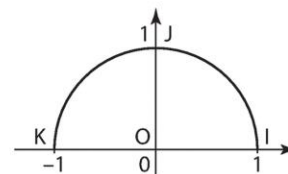
1. Montrer que f est paire.

2. Le programme suivant est écrit en langage PYTHON. Qu'affiche-t-il ?

```
import math
def f(x):
    return (x**2)*math.cos(x)
for k in range(-5,11):
    print(k, f(k))
```

75 Inéquations et architecture

Un tennis club possède un gymnase de forme demi-cylindrique, dont un schéma en coupe est représentée ci-dessous. L'unité graphique est égale à 10 m.



1. On souhaite installer des gradins hauts de 5 m de chaque côté du court central situé à l'intérieur de ce gymnase.

a) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

b) En déduire les positions limites au sol des gradins.

c) On décide d'installer une guirlande lumineuse le long du plafond, d'un gradin à l'autre. Quelle longueur de guirlande va-t-on utiliser ?

2. On décide finalement d'installer une guirlande lumineuse horizontale longue de 10 m au plafond, de manière symétrique par rapport au sommet du gymnase.

a) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation $-\frac{1}{2} \leq \cos(x) \leq \frac{1}{2}$.

b) On admet que la personne qui fixe la guirlande mesure 1,80 m et que ses bras ne doivent pas dépasser le haut de sa tête au moment de l'installation.

En déduire la hauteur minimale de l'échafaudage pour pouvoir exécuter cette manœuvre.

83 Formules de tangentes

1. Soit un réel x tel que $\cos(x) \neq 0$ et $\sin(x) \neq 0$. Établir les formules trigonométriques suivantes.

$$a) 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad b) 1 + \frac{1}{\tan^2(x)} = \frac{1}{\sin^2(x)}$$

2. Soit un réel x associé à un angle aigu tel que $\tan(x) = 1$. Quelles sont les valeurs possibles des couples $(\cos(x); \sin(x))$?