Chapitre 1 : Matrices - Opérations

I. Définitions et vocabulaire

Définition – Matrice

Une matrice de taille … … …. est un …………………….. formé de … … … … … et … … … … … … qui s'écrit sous la forme :

	… … … … … ..
… … … … … …	$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Le nombre a_{ij} (avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$) est situé dans la i-ième ligne et la j-ième colonne. Il est appelé un **…………………………...**

Remarque

En général, on note une matrice avec une …………………… ou avec le …………………… entre parenthèses, par exemple … … ….

Si $i > 9$ ou $j > 9$, on écrira par exemple $a_{1,11}$ et pas … … … pour éviter la confusion avec … … ….

Exemple

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de taille 2×3 égale à $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Le coefficient a_{12} vaut……Le coefficient a_{21} vaut …...

Définition - Matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée

- Une matrice de taille $1 \times n$ est appelée **……………………** de taille…..
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée **……………………** de taille…..
- Une matrice de taille $n \times n$ est appelée **……………………………….**

Exemple

$A = (4 \quad -2 \quad 1)$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ sont respectivement une matrice ……….de taille…., une matrice ………….. de taille….. et une matrice…………..d'ordre…….

Définition - Matrices égales

Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont **égales** si elles ont ……………………..et si, pour tout couple $(i; j)$ tel que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on a………………………...

Définition - Matrice diagonale

Une **……………………..** (a_{ij}) est une matrice ……….. dont les coefficients à l'extérieur de la **……………………..** sont nuls, c'est-à -dire tels que ………….. pour … … … ….

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Remarque
Une matrice diagonale se note aussi……………………….
Dans une matrice diagonale, un ou plusieurs coefficients a_i peuvent ……………...

Définition - Matrice identité

La matrice identité d'ordre **n** est la ……………………………., notée $\mathbf{I_n}$, dont la diagonale principale ne ………………………………..

Exemple
L'identité d'ordre 3 est $I_3 =$ … … … ….. On peut aussi la noter … … … … … … … …

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note l'identité I sans préciser son ordre en indice.

Définition - Matrice transposée

La matrice transposée d'une matrice A de taille $m \times n$ est la matrice notée … … … , de taille … … … … .., obtenue en ………………………………………………………. de A.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \dots \dots . \quad ; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \dots \dots \dots . \quad ; \quad (0{,}3 \quad 0{,}7)^{\mathrm{T}} = \dots \dots \dots \dots$$

II. Opérations sur les matrices

1. Somme de deux matrices

Définition – Somme de deux matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$.
La somme des matrices A et B est la matrice notée … … … … … .. définie par :
$A + B = (c_{ij})$ avec $c_{ij} =$ … … … … … .. pour tout couple $(i; j)$ tel que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. $A + B =$ … … … … ..

Propriété

Soit A, B, C trois matrices de même taille.
$A + B =$ … … … … .. (commutativité) $(A + B) + C =$ … . … … .. (associativité)

Définition - Différence de deux matrices

Soit A et B deux matrices de même taille.
La différence des matrices A et B est la matrice notée … … … …. égale à la somme … … … … où … … est la matrice opposée de B dont les coefficients sont les …………………………………………..

Exemple
Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.
$A - B = A +$ … … … $=$ … … … … … … ...

2. Produit d'une matrice par un réel

Définition - Produit d'une matrice par un réel

Soit A une matrice et k un nombre réel.
Le **produit** de A par le réel k est la matrice notée …… dont les coefficients sont obtenus en ………………………………………………………………………

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 3{,}5 & -5 & 2{,}5 \\ -1 & 0{,}5 & -5{,}5 \end{pmatrix}$.

Alors, $-2A =$ … … … … … … … … … … … … ….

Propriété

Soit A et B deux matrices de même taille et deux réels k et k'.

- $0A =$ … et $1A =$ …
- $k(A+B) =$ … … … … … … ..
- $(k+k')A =$ … … … … ….
- $(kk')A = \cdots$ … … …

Remarque

Dans l'égalité $0A = 0$, le 0 de gauche est un ………. mais celui de droite désigne la **…………..**, matrice ayant la même taille que A et dont tous ……………………………….

3. Produit de deux matrices

Définition - Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Le produit de la matrice ligne $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est noté … … … ..et est égal au réel :

$$\sum_{i=1}^{n} \ldots .. = \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots .$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. $AB =$ … … … … … … … … … … … … …

Définition - Produit de deux matrices

Soit A une matrice de taille … … … … ….et B une matrice de taille … … … … … ..
Le produit de A par B, noté AB, est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille … … … … …. telle que c_{ij} est égal au produit de la … … … … … … … … … … de A par la … … … … … … … … … … de B.

Remarque

- Le produit d'une matrice A par une matrice B n'existe qu'à condition que ……………………………………………………………………………………...
- Si le produit d'une matrice A par une matrice B existe, en général, il n'est pas ……………….. : en premier lieu, BA n'existe pas toujours (il n'existe que si A et B sont des matrices carrées) et, même si c'est le cas, généralement on n'a pas … … … … … … … …

MÉTHODE 1 – Multiplier deux matrices

Pour calculer la matrice C égale à AB, on vérifie que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, puis on dispose les matrices suivant le schéma

	B
A	C

de sorte que c_{ij} soit à l'intersection du prolongement de la i-ème ligne de A et de la j-ème colonne de B.

Exercice d'application : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

Remarque

Il n'est pas nécessaire que l'une des matrices A ou B soit nulle pour que … … … … ….

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $AB =$ … … … …

Propriétés

Soit A, B et C trois matrices compatibles avec les produits écrits ci-après et soit k un réel.

- $(AB)C =$ … … … . = … … … .. (associativité)
- $A(B+C) =$ … … … … … … et $(A+B)C = \cdots$ … … … …. (distributivité)
- $(kA)B =$ … … … . . = … … … …
- $AI =$ … . . = …. et $A0 =$ … . . = … ..

4. Puissance d'une matrice carrée

Définition

Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.
La puissance n-ième de A est la matrice notée … … … …. égale :

- au produit de n facteurs A si $n \neq 0$;
- à la matrice identité I de même ordre que celui de A si $n = 0$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Alors, $A^0 =$ … … .. ; $A^2 =$ … … … … … … . = … … … … ….

On peut démontrer par récurrence que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} \ldots\ldots & \ldots.. \\ \ldots.. & \ldots.. \end{pmatrix}$.

MÉTHODE 2 - Effectuer un calcul matriciel avec la calculatrice

Exercice d'application :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 2AB + B^2$.

Avec une calculatrice TI

III. Matrices inversibles

1. Inverse d'une matrice carrée

Définition – Inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée A d'ordre n est **………………..**s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$\dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$$

La matrice B, notée … … …., est appelée la **………………………** de A.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$. $AB = BA = \dots\dots\dots\dots$ donc B est l'inverse de A.

Propriété

Si une matrice est inversible, alors son inverse est ………………..

Preuve…..

Propriété

Si $AB = I$, alors A est …………….. et $B = \dots\dots\dots.$

Il suffit donc seulement de vérifier l'une des égalités … … … .. **ou** … … … … … pour montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, $AB = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots$

Donc A et B sont …………………………….et on a les égalités … … … … … .. et … … … … … … ..

2. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition – Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le réel noté … … … … ou … … … …. égal à … … … … … …..

Théorème – Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

- La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, … … … … …..
- Si A est inversible, alors $A^{-1} = \dots\dots\dots\dots\dots$

Preuve :

…………

Remarque

- Toute matrice carrée admet un déterminant et un seul, mais pour un ordre strictement supérieur à 2, il n'existe pas de formule simple pour le calculer et on utilisera une calculatrice ou un logiciel de calcul formel.
- Le déterminant non nul est un critère d'inversibilité d'une matrice carrée de tout ordre.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Alors, $\det(A) = \cdots$ ….

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} =$ … … … … … … … …

IV. Résolution d'un système linéaire

Propriété – Ecriture matricielle d'un système

Le système linéaire $\begin{cases} ax + by & = & c \\ a'x + b'y & = & c' \end{cases}$ a pour écriture matricielle … … … … … … … … … … … … … ….

Preuve :……….

Remarque : Cette propriété se généralise à un système de dimension quelconque.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ correspond au système ……………………

Propriété

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne de taille n.
Alors, le système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution :
le n-uplet correspondant à la matrice colonne … … … … … … … ….

Preuve :

……………..

MÉTHODE 3 – Résoudre un système de deux équations à deux inconnues

Exercice d'application :

Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x + 5y & = & 8 \\ 3x - 4y & = & 15 \end{cases}$

Remarque

Un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ où A n'est pas inversible a soit …………………., soit ………………..

Exemple :

Le système $\begin{cases} 3x + 6y & = & a \\ 4x + 8y & = & b \end{cases}$ s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A =$ … … … ….

Or, $\det(A) =$ … … donc A ……………………..

Dans le système, multiplions l'équation du haut par 4 et celle du bas par 3. On obtient :
… … … … … …. ce qui entraîne que … … … … … … toujours vrai, ou jamais.

MÉTHODE 4 – Résoudre un système linéaire avec la calculatrice

- On passe à l’écriture matricielle du système : $AX = B$.
- On vérifie que le déterminant de A est non nul, pour vérifier l’inversibilité de A.
- On détermine alors A^{-1}, puis le produit $A^{-1}B$ pour obtenir la solution.

Exercice d’application :

Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x - 3y + 4z & = & -1 \\ x + y - 5z & = & 2 \\ -4x + 3y & = & 6 \end{cases}$.

Correction :

Le système a pour écriture matricielle $AX = B$ avec :

……………………………..

Avec une calculatrice TI

- Entrer dans le mode MATRICE puis dans le menu MATH et choisir la commande *dét(*.
  Saisir la matrice en utilisant les crochets "[" (touches $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\times}$) et "]" (touches $\boxed{\text{2nde}}\boxed{-}$).
  Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche $\boxed{(\text{-})}$.
- Faire "préced" (touches $\boxed{\text{2nde}}\boxed{\text{entrer}}$) pour revenir dans l’instruction précédente.
  Supprimer *dét(* et la parenthèse finale.
  À la suite, appuyer sur la touche $\boxed{x^{-1}}$, saisir la matrice colonne B et appuyer sur "entrer".