Matrices et opérations
Exercices (Sésamath page 95)

• Taille et coefficients de matrices

12 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 4.
Écrire la matrice A dans chacun des cas suivants :

1) $a_{ij} = i + j$ **3)** $a_{ij} = i^3 + 3j$

2) $a_{ij} = 2i - j$ **4)** $a_{ij} = |i - 2j|$

13 Soit $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 5.
Écrire la matrice B dans chacun des cas suivants :

1) $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ i+1 \text{ si } i < j \\ j-2 \text{ si } i > j \end{cases}$ **2)** $b_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 3 \text{ si } i < j \\ -2 \text{ si } i > j \end{cases}$

16 Soit l'algorithme suivant :

```
n, i, j sont des entiers
A est une matrice carrée de taille n
Traitement
Saisir n et A
Pour i allant de 1 à n
   Pour j allant de 1 à n
      Si i+j=n+1 alors aij=1 sinon aij=0
   Fin Pour
Fin Pour
```

1) Faire tourner l'algorithme pour $n = 4$.
2) Quel type de matrice l'algorithme fabrique-t-il ?
3) Modifier l'algorithme pour qu'il fabrique l'identité.

• Transposée d'une matrice

17 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 8 & 7 \\ \dots & 9 & \dots & 1 \\ 7 & \dots & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On sait que $a_{32} = 5$, $a_{23} = -4$, $a_{21} = 8$ et $a_{12} = 11$.
Compléter A et écrire A^{T}, la transposée de A.

19 Une matrice carrée A est dite **symétrique** si $M = M^{\mathsf{T}}$ et **antisymétrique** si $M = -M^{\mathsf{T}}$.

1) Soit $K = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $X = K + K^{\mathsf{T}}$ et $Y = 2K - X$.

- **a)** Montrer que X est symétrique, Y antisymétrique.
- **b)** Qu'ont en commun les trois matrices K, X et Y ?

2) Soit S, A et Q trois matrices carrées d'ordre 3 respectivement symétrique, antisymétrique et quelconque.
Montrer que :

- **a)** Les éléments diagonaux de A sont nuls.
- **b)** $Q + Q^{\mathsf{T}}$ est symétrique ; $Q - Q^{\mathsf{T}}$ antisymétrique.
- **c)** S^n est symétrique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

• Combinaison linéaire de matrice

21 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 2 & -4 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer :

1) $A + B$ **2)** $3A$ **3)** $-5B$ **4)** $2A - 3B$

24 Déterminer les réels x et y tels que :

$$x \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -23 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$$

25 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 11 \\ a & b & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 15 & c & d \\ e & 35 & f \\ 6 & 5 & g \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a, b, c, d, e, f, g et k tels que $A = kB$.

• Produit de matrices

29 Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $p \times q$.
Déterminer à quelle condition chacun des produits suivants existe et donner sa taille si c'est le cas.

1) AB **2)** BA **3)** $BABA$ **4)** A^3

31 Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $AB = 0$, puis calculer BA.

32 Dans chaque cas, montrer que le produit des matrices A et B est commutatif.

1) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

33 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer AB et BA.
2) Que peut-on dire des matrices A et B ?

Puissance d'une matrice

38 Déterminer le carré des matrices suivantes :

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ **3)** $C = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ -2 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

2) $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ **4)** $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$

39 Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \dfrac{1}{3}A$.
Déterminer B^n. En déduire A^n.

40 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = kA$ où $k \in \mathbb{R}$.
Pour quelles valeurs de k a-t-on $B^2 = B$?

41 Soit $A=\begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que, pour tout entier naturel non nul n :

1) $A^n = A$ **2)** $B^{2n} = -B$ **3)** $4C^n = 4^n C$

42 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et I l'identité d'ordre 3.

1) Calculer I^n et A^n.

2) En déduire l'expression de la matrice $(I + A)^5$.

43 Déterminer, pour tout n entier naturel non nul, la puissance n-ième de chaque matrice.

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ **2)** $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ **3)** $C=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

44 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^2.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $A^{2n} = 5^n I$.

3) Calculer A^{2016}.

46 Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$ avec a réel strictement positif.
Le but est de déterminer $M^{1\,000}$ de trois façons.

1) a) Calculer M^2, M^3 et M^4.

b) Conjecturer puis démontrer l'expression de M^n en fonction de n. En déduire $M^{1\,000}$.

2) a) Vérifier que $M^2 = 2M - I$.

b) En déduire M^3 et M^4 en fonction de M et I.

c) Conclure.

3) a) Déterminer la matrice A telle que $M = I + A$.

b) Calculer A^2.

c) En déduire M^2, M^3 et M^4 en fonction de A et I.

d) Exprimer $M^{1\,000}$ en fonction de A et I.

e) Conclure.

Inverse d'une matrice

61 Pour chaque matrice, déterminer si elle est inversible et, si oui, calculer son inverse.

1) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 6 & -8 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 & 2 \\ 1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$

62 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^2 + A$.

2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

63 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Calculer $A^2 - 3A$.

2) En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

64 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Démontrer que $2A - A^2 = I$.

2) En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

66 Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Pour toute matrice carrée inversible M et tout entier naturel n, on note $M^{-n} = \left(M^{-1}\right)^n$.

1) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$:

a) $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **b)** $B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 2^n-1 & 1 \end{pmatrix}$

2) Peut-on en déduire $(AB)^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$?

67 **Inverse d'un produit**

Soit A et B deux matrices inversibles et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

1) Prouver que AB est inversible et déterminer $(AB)^{-1}$.

2) Prouver que λA est inversible et déterminer $(\lambda A)^{-1}$.

Résolution d'un système linéaire

68 ▶ MÉTHODE 3 p. 93

À l'aide des matrices mais sans l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} -4x + 3y = 2 \\ -x + y = 5 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 3\sqrt{3}x + 3y = \sqrt{3} \\ -3x - \sqrt{3}y = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 9x - 4y = 2 \\ -1,8x + 0,8y = -9 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 6x + 8y = 8\,400 \\ x + 1,5y = 1\,450 \end{cases}$

69 À l'aide des matrices mais sans l'aide d'un logiciel, résoudre les systèmes suivants (on discutera des solutions selon les valeurs de θ) :

1) $\begin{cases} \cos\theta x - \sin\theta y &= \cos\theta + \sin\theta \\ \cos\theta x + \sin\theta y &= -\cos\theta + \sin\theta \end{cases}$

2) $\begin{cases} \cos\theta x - \sin\theta y &= \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos\theta y + \sin\theta x &= -\dfrac{1}{2} \end{cases}$

73 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -6 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

2) Résoudre les systèmes d'équations suivants :

a) $\begin{cases} x - 2y - 2z = 0 \\ 2x + y + 2z = -9 \\ 2x + z = -8 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 2y - 2z = -2 \\ 2x + 5y - 6z = -7 \\ -2x - 4y + 5z = 8 \end{cases}$

74 Soit le système linéaire (S) $\begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 3x - 4y = 15 \end{cases}$.

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$.

1) a) Écrire (S) sous la forme matricielle $AX = B$.

b) Vérifier que A est inversible et calculer A^{-1}.

c) En déduire les solutions du système.

2) a) Écrire (S) sous la forme matricielle $X'A' = B'$.

b) Que peut-on dire de A et A' ? de B et B' ?

c) Exprimer X' en fonction de A et B.

78 **D'après Bac S (Asie - 2015)**

Le but est de résoudre l'équation (E) : $x^2 - 8y^2 = 1$ où x, y sont deux entiers relatifs.

Soit $(a; b)$ un couple solution de (E) et soit a' et b' deux entiers relatifs tels que :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ où } A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Exprimer a' et b' en fonction de a et de b.

2) Déterminer la matrice M^{-1}, puis exprimer a et b en fonction de a' et b'.

3) Démontrer que $(a; b)$ est solution de (E) si, et seulement si, $(a'; b')$ est solution de (E).

4) Soit les suites (a_n) et (b_n) définies par $a_0 = 3$, $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(a_n\ ;\ b_n)$ est solution de (E).

79 **D'après Bac S (Amérique du Nord - 2015)**

Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Partie A

1) Déterminer la matrice M^2.

2) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 20 & 10 & 11 \\ 12 & 2 & 9 \\ 42 & 20 & 21 \end{pmatrix}$.

Vérifier que $M^3 = M^2 + 8M + 6I$.

3) En déduire que M est inversible et que :

$$M^{-1} = \frac{1}{6}\left(M^2 - M - 8I\right)$$

Partie B

On cherche à déterminer trois nombres entiers a, b et c tels que la parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$ passe par les points A(1 ; 1), B(−1 ; −1) et C(2 ; 5).

1) Démontrer que le problème revient à chercher trois entiers a, b et c tels que

$$M \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

2) Calculer les nombres a, b et c et vérifier que ces nombres sont des entiers.

82 On cherche une fonction polynôme f vérifiant :

$$(x^2 - 2)f''(x) + (1 - 3x)f'(x) + f(x) = x^3 + 6x^2 - 2x + 4$$

1) Justifier que $f(x)$ est un polynôme de degré 3.

2) Soit $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Écrire un système qui régit les coefficients a, b, c et d.

3) À l'aide des matrices, résoudre ce système.

83 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ et I l'identité d'ordre 3.

1) Déterminer les réels a et b tels que $aA + bI = A^2$.

2) En déduire que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A et I.

98 **Méthode de Cayley-Hamilton**

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ où a, b, c, d sont des réels.

1) Démontrer que $M^2 = (a + d)M - (ad - bc)I$.

2) En déduire que si $ad - bc \neq 0$, alors M est inversible.

Retrouver dans ce cas l'inverse de M en fonction de a, b, c et d.

99 Montrer que l'équation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a des solutions si, et seulement si, les réels a, b, c suivent dans cet ordre une progression arithmétique.