Chapitre 1 : Matrices - Opérations

I. Définitions et vocabulaire

Définition – Matrice

Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau de nombres formé de $\boldsymbol{m}$ **lignes** et $\boldsymbol{n}$ **colonnes** qui s'écrit sous la forme :

$$\begin{array}{cc} & n \text{ Colonnes} \\ m \text{ Lignes} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}$$

Le nombre a_{ij} (avec $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$) est situé dans la i-ième ligne et la j-ième colonne.
Il est appelé un **coefficient de la matrice**.

Remarque

En général, on note une matrice avec une lettre majuscule ou avec le coefficient général entre parenthèses, par exemple (a_{ij}).

Si $i > 9$ ou $j > 9$, on écrira par exemple $a_{1,11}$ et pas a_{111} pour éviter la confusion avec $a_{11,1}$.

Exemple

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de taille 2×3 égale à $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Le coefficient a_{12} vaut 7.

Le coefficient a_{21} vaut 3.

Définition - Matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée

- Une matrice de taille $1 \times n$ est appelée **matrice ligne** de taille n.
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée **matrice colonne** de taille n.
- Une matrice de taille $n \times n$ est appelée **matrice carrée d'ordre** n.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

sont respectivement une matrice ligne de taille 3, une matrice colonne de taille 2

et une matrice carrée d'ordre 2.

Définition - Matrices égales

Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont **égales** si elles ont la même taille $m \times n$ et si, pour tout couple $(i; j)$ tel que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on a $a_{ij} = b_{ij}$.

Définition - Matrice diagonale

Une **matrice diagonale** (a_{ij}) est une matrice carrée dont les coefficients à l'extérieur de la **diagonale principale** sont nuls, c'est-à -dire tels que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Remarque

Une matrice diagonale se note aussi $\mathrm{diag}(\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \dots, \mathbf{a_n})$.

Dans une matrice diagonale, un ou plusieurs coefficients a_i peuvent être nuls.

Définition - Matrice identité

La matrice identité d'ordre **n** est la matrice diagonale d'ordre n, notée $\mathbf{I_n}$,

dont la diagonale principale ne contient que des 1.

Exemple

L'identité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut aussi la noter $\text{diag}(1,1,1)$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note l'identité I sans préciser son ordre en indice.

Définition - Matrice transposée

La matrice transposée d'une matrice A de taille $m \times n$ est la matrice notée $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$, de taille $n \times m$,

obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A.

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \; ; \; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \; ; \; (0{,}3 \quad 0{,}7)^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0{,}3 \\ 0{,}7 \end{pmatrix}$$

Exercices

12 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 4.

Écrire la matrice A dans chacun des cas suivants :

1) $a_{ij} = i + j$
2) $a_{ij} = 2i - j$
3) $a_{ij} = i^3 + 3j$
4) $a_{ij} = |i - 2j|$

13 Soit $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 5.

Écrire la matrice B dans chacun des cas suivants :

1) $b_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ i + 1 \text{ si } i < j \\ j - 2 \text{ si } i > j \end{cases}$

2) $b_{ij} = \begin{cases} i \text{ si } i = j \\ 3 \text{ si } i < j \\ -2 \text{ si } i > j \end{cases}$

16 Soit l'algorithme suivant :

```
n, i, j sont des entiers
A est une matrice carrée de taille n
Traitement
Saisir n et A
Pour i allant de 1 à n
    Pour j allant de 1 à n
        Si i+j=n+1 alors aij=1 sinon aij=0
    Fin Pour
Fin Pour
```

1) Faire tourner l'algorithme pour $n = 4$.
2) Quel type de matrice l'algorithme fabrique-t-il ?
3) Modifier l'algorithme pour qu'il fabrique l'identité.

Exercices

17 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 8 & 7 \\ \dots & 9 & \dots & 1 \\ 7 & \dots & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On sait que $a_{32} = 5$, $a_{23} = -4$, $a_{21} = 8$ et $a_{12} = 11$.

Compléter A et écrire A^{T}, la transposée de A.

19 Une matrice carrée A est dite **symétrique** si $M = M^{\mathsf{T}}$ et **antisymétrique** si $M = -M^{\mathsf{T}}$.

1) Soit $K = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $X = K + K^{\mathsf{T}}$ et $Y = 2K - X$.

a) Montrer que X est symétrique, Y antisymétrique.

b) Qu'ont en commun les trois matrices K, X et Y ?

2) Soit S, A et Q trois matrices carrées d'ordre 3 respectivement symétrique, antisymétrique et quelconque. Montrer que :

a) Les éléments diagonaux de A sont nuls.

b) $Q + Q^{\mathsf{T}}$ est symétrique ; $Q - Q^{\mathsf{T}}$ antisymétrique.

c) S^n est symétrique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II - Opérations sur les matrices

1. Somme de deux matrices

Définition – Somme de deux matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$.

La somme des matrices A et B est la matrice notée $A + B$ définie par :

$A + B = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout couple $(i; j)$ tel que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$. $A + B = \begin{pmatrix} -3+2 & 5-5 \\ -1+4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Propriété

Soit A, B, C trois matrices de même taille.

$A + B = B + A$ (commutativité) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (associativité)

Définition - Différence de deux matrices

Soit A et B deux matrices de même taille.
La différence des matrices A et B est la matrice notée $A - B$

égale à la somme $A + (-B)$ où $-B$ est la matrice opposée de B

dont les coefficients sont les opposés des coefficients de B.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-2 & 5+5 \\ -1-4 & 3+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Produit d'une matrice par un réel

Définition - Produit d'une matrice par un réel

Soit A une matrice et k un nombre réel.
Le **produit** de A par le réel k est la matrice notée kA dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 3{,}5 & -5 & 2{,}5 \\ -1 & 0{,}5 & -5{,}5 \end{pmatrix}$.

Alors, $-2A = \begin{pmatrix} -2 \times 3{,}5 & -2 \times (-5) & -2 \times 2{,}5 \\ -2 \times (-1) & -2 \times 0{,}5 & -2 \times (-5{,}5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 & -5 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}$.

Propriété

Soit A et B deux matrices de même taille et deux réels k et k'.

- $0A = 0$ et $1A = A$
- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + k')A = kA + k'A$
- $(kk')A = k(k'A)$

Remarque

Dans l'égalité $0A = 0$, le 0 de gauche est un réel mais celui de droite désigne la **matrice nulle**, matrice ayant la même taille que A et dont tous les coefficients sont nuls.

EXERCICES

21 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 2 & -4 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer :

1) $A + B$ **2)** $3A$ **3)** $-5B$ **4)** $2A - 3B$

24 Déterminer les réels x et y tels que :

$$x \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -23 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$$

25 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 11 \\ a & b & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 15 & c & d \\ e & 35 & f \\ 6 & 5 & g \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a, b, c, d, e, f, g et k tels que $A = kB$.

3. Produit de deux matrices

Définition - Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Le produit de la matrice ligne $A = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ par la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est noté AB et est égal au réel :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$AB = 3 \times (-1) + 0 \times (-4) - 2 \times (-2) = 1.$$

Définition - Produit de deux matrices

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$.
Le produit de A par B, noté AB,

est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m \times p$ telle que

c_{ij} est égal au produit de la i-ième ligne de A par la j-ième colonne de B

Remarque

- Le produit d'une matrice A par une matrice B n'existe qu'à condition que

  le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B.

- Si le produit d'une matrice A par une matrice B existe, en général, il n'est pas commutatif.

  En premier lieu, BA n'existe pas toujours (il n'existe que si A et B sont des matrices carrées) et,

  même si c'est le cas, généralement on n'a pas $AB = BA$.

MÉTHODE 1 – Multiplier deux matrices

Pour calculer la matrice C égale à AB, on vérifie que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B, puis on dispose les matrices suivant le schéma

	B
A	C

de sorte que c_{ij} soit à l'intersection du prolongement de la i-ème ligne de A et de la j-ième colonne de B.

Exercice d'application : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer AB.

Remarque

Il n'est pas nécessaire que l'une des matrices A ou B soit nulle pour que $AB = 0$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriétés

Soit A, B et C trois matrices compatibles avec les produits écrits ci-après et soit k un réel.

- $(AB)C = A(BC) = ABC$ (associativité)
- $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$ (distributivité)
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$
- $AI = IA = A$ et $A0 = 0A = 0$

Exercices

29 Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $p \times q$.
Déterminer à quelle condition chacun des produits suivants existe et donner sa taille si c'est le cas.

1) AB **2)** BA **3)** $BABA$ **4)** A^3

31 Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $AB = 0$, puis calculer BA.

32 Dans chaque cas, montrer que le produit des matrices A et B est commutatif.

1) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

33 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1) Déterminer AB et BA.

2) Que peut-on dire des matrices A et B ?

4. Puissance d’une matrice carrée

Définition

Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.
La puissance n-ième de A est la matrice notée A^n égale :

- au produit de n facteurs A si $n \neq 0$;
- à la matrice identité I de même ordre que celui de A si $n = 0$

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$. Alors, $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

On peut démontrer par récurrence que, pout tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

MÉTHODE 2 - Effectuer un calcul matriciel avec la calculatrice

Exercice d'application :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 2AB + B^2$.

Avec une calculatrice TI

- Entrer dans le mode "Matrice" puis le menu "EDIT".
- Saisir la taille de la matrice A puis ses coefficients. Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche "(-)". Faire de même pour B.
- Quitter le mode "Matrice" puis y entrer à nouveau et, dans le menu "NOMS", sélectionner la matrice . Compléter la formule et taper "Entrer".

III. Matrices inversibles

1. Inverse d'une matrice carrée

Définition – Inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$AB = BA = I$$

La matrice B, notée $\mathbf{A^{-1}}$, est appelée la **matrice inverse** de A.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } B \text{ est l'inverse de } A.$$

Propriété

Si une matrice est inversible, alors son inverse est unique.

Preuve

Soit A une matrice inversible ayant deux inverses B et C.
On a $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Ainsi, $B = C$. Donc, l'inverse de A est unique.

Propriété

Si $AB = I$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Il suffit donc seulement de vérifier l'une des égalités $AB = I$ ou $BA = I$ pour montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$.

Donc A et B sont inverses l'une de l'autre et on a les égalités $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

2. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition – Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le réel noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ égal à $ad - bc$.

Théorème – Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

- La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.
- Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Théorème – Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

- La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.
- Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Preuve :

Soit $N = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Alors, $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$.

- Si $ad - bc \neq 0$, alors $\frac{1}{ad-bc}MN = I \Leftrightarrow M\left(\frac{1}{ad-bc}N\right) = I$.

Donc M est inversible et son inverse est $\frac{1}{ad-bc}N = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Si $ad - bc = 0$, alors $MN = 0$. Supposons alors que M soit inversible, d'inverse P.

Alors, on aurait $PMN = IN = N$ et $PMN = P0 = 0$ et donc $N = 0$, ce qui est absurde.

Remarque

- Toute matrice carrée admet un déterminant et un seul, mais pour un ordre strictement supérieur à 2, il n'existe pas de formule simple pour le calculer et on utilisera une calculatrice ou un logiciel de calcul formel.
- Le déterminant non nul est un critère d'inversibilité d'une matrice carrée de tout ordre.

Exemple

$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Alors, $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 2 \times 8 = 18 - 16 = 2 \neq 0$.

Ainsi, A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1{,}5 \end{pmatrix}$.

IV. Résolution d’un système linéaire

Propriété – Écriture matricielle d’un système

Le système linéaire $\begin{cases} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{cases}$ a pour écriture matricielle $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

Preuve :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax+by \\ a'x+b'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax+by & = & c \\ a'x+b'y & = & c' \end{cases}.$$

Remarque : Cette propriété se généralise à un système de dimension quelconque.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ correspond au système $\begin{cases} 2x-3y+z & = & 7 \\ 3x-2y-z & = & -5 \end{cases}.$

Propriété

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne de taille n.

Alors, le système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution :

le n-uplet correspondant à la matrice colonne $A^{-1}B$.

Preuve :

Soit un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ où A est inversible.

Alors, on a : $AX = B$

$$\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow IX = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

MÉTHODE 3 – Résoudre un système de deux équations à deux inconnues

Exercice d'application :

Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x+5y &= & 8 \\ 3x-4y &= & 15 \end{cases}$

Remarque

Un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ où A **n'est pas inversible** a soit une infinité de solutions, soit aucune.

Exemple :

Le système $\begin{cases} 3x+6y &= & a \\ 4x+8y &= & b \end{cases}$ s'écrit matriciellement $AX = B$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Or, $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.

Dans le système, multiplions l'équation du haut par 4 et celle du bas par 3. On obtient :

$\begin{cases} 12x+24y &= & 4a \\ 12x+24y &= & 3b \end{cases}$ ce qui entraîne que $4a = 3b$ toujours vrai, ou jamais.

MÉTHODE 4 – Résoudre un système linéaire avec la calculatrice

- On passe à l'écriture matricielle du système : $AX = B$.
- On vérifie que le déterminant de A est non nul, pour vérifier l'inversibilité de A.
- On détermine alors A^{-1}, puis le produit $A^{-1}B$ pour obtenir la solution.

Exercice d'application : Résoudre le système linéaire $\begin{cases} 2x - 3y + 4z & = & -1 \\ x + y - 5z & = & 2 \\ -4x + 3y & = & 6 \end{cases}$.

Avec une calculatrice TI

- Entrer dans le mode MATRICE puis dans le menu MATH et choisir la commande *dét(*.

  Saisir la matrice en utilisant les crochets "[" (touches $\boxed{\text{2nde}}$ $\boxed{\times}$) et "]" (touches $\boxed{\text{2nde}}\boxed{-}$). Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche $\boxed{\text{(-)}}$.
- Faire "préced" (touches $\boxed{\text{2nde}}\boxed{\text{entrer}}$) pour revenir dans l'instruction précédente.

  Supprimer *dét(* et la parenthèse finale.

  À la suite, appuyer sur la touche $\boxed{x^{-1}}$, saisir la matrice colonne B et appuyer sur "entrer".