**Chapitre 1 – Suites et récurrence**

1. **Raisonnement par récurrence**

**Théorème - Principe du raisonnement par récurrence**

Soit $P(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel $n$. On suppose que :

➀ $…………………$

➁ Pour tout entier naturel $n$ fixé, si $…………………………………………………………..$.

Alors pour tout entier naturel $n$, $……………………………$

**Théorème - Principe du raisonnement par récurrence à partir d'un certain rang**

Soit $n\_{0}\in N$ et $P(n)$ une propriété définie pour $……………………$. On suppose que :

➀ $…………………………….$

➁ Pour tout entier naturel $…………………………………………………………………………$

Alors pour tout entier naturel $…………………………………$

**Remarque**

Pour démontrer par récurrence qu’une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n\geq n\_{0}$ on procède en trois étapes.

**Étape ➀ - ………………………………**

On vérifie que la ………………………………………………….

**Étape ➁ - ……………………………….**

Soit $n$ un entier naturel tel que $n\geq n\_{0}$

On suppose que ………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………..

**Étape ➂ - ………………………………**

On conclut que $………………………………………………………$

**Exemple**

Pour tout $n\in N$, on considère la propriété $P\left(n\right): « 3^{n}=5 +2n »$

…

**Propriété - Inégalité de Bernoulli**

Pour tout réel $a$ strictement positif et pour tout entier naturel $n$ : ……………………………..

**Démonstration**

Soit $a$ un réel positif.

…..

* **Méthodes 1 et 2 page 17**
1. **Limite d'une suite**

**Définition - Suite divergeant vers l'infini**

* On dit que la suite $\left(u\_{n}\right)$ tend vers $+\infty $quand $n$ tend vers $+\infty $, si …………………………………….

………………………………………………………………………………………………………….

On dit que ……………………… et on note $……………………………$



* On dit que la suite $\left(u\_{n}\right)$ tend vers $-\infty $ quand $n$ tend vers $+\infty $, si …………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………..

On dit que $…………………………..$ et on note$………………………………. $.



**Exemple**

Soit $\left(u\_{n}\right)$la suite définie par $u\_{n}=n^{2}$.

……

**Définition - Suite convergeant vers un nombre réel**

On dit que la suite $\left(u\_{n}\right)$ tend vers un réel $l$ quand $n$ tend vers $+\infty $, si ………………………………..

………………………………………………………………………………………………………….

On que $………………………………….$ et on note $…………………………… $.



**Remarque**

Tout intervalle ouvert contenant $l$ contient un intervalle ouvert centré en $l$, c’est-à-dire de la forme $\left]l-ϵ ;l+ϵ\right[$, avec $ϵ$ un réel strictement positif.

On peut donc réécrire la définition : $\lim\_{n\to +\infty }u\_{n}=l $si et seulement si ………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………..

**Théorème - Unicité de la limite**

Lorsqu’elle ………………………., la limite est …………………….

**Remarque**

Une suite qui ne converge pas, …………. Elle peut soit diverger vers $+\infty $ou $-\infty $soit n'avoir pas de limite.

Par exemple, la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par $u\_{n}=\left(-1\right)^{n}$ n'a pas de limite ………………………………………..

* **Méthodes 3 page 19**

1. **Propriétés des limites**

**Propriété – Limite des suites de référence**

* Les suites $\left(\sqrt{n}\right) , \left(n\right)$ et $\left(n^{k}\right)$ avec $k\in N$ tendent vers $……….$ quand $n$ tend vers $……..$ ce qui s’écrit :

$$…………………………….  ; ………………………….  ; ……………………….. .$$

* Les suites $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) , \left(\frac{1}{n}\right)$ et $\left(\frac{1}{n^{k}}\right)$ avec $k\in N^{\*}$ tendent vers $….$ quand $n$ tend vers $…………$ ce qui s’écrit :

$$……………………………… ; ………………………………. ; …………………………….. $$

**Propriété - Limite d’une somme et d’un produit**

Soit $\left(u\_{n}\right)$ et $\left(v\_{n}\right)$ deux suites, et $l$ et $l'$ deux réels.



**Propriété - Limite d’un quotient**

Soit $\left(u\_{n}\right)$ et $\left(v\_{n}\right)$ deux suites, et $l$ et $l'$ deux réels.



**Remarques**

Dans les deux tableaux précédents :

① **indéterminée** signifie que c'est une **……………………….**, et qu'il n'y a pas de ………………………..

………………………………………………………………………………………………...

② $\lim\_{n\to +\infty }v\_{n}=0^{+}$ (resp. $0^{-}$) signifie ………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………………..

**Exemples**

❶ Soit $\left(u\_{n}\right)$ la suite définie par $u\_{n}=n\sqrt{n}$

……

❷ Soit $\left(u\_{n}\right)$ la suite définie par $u\_{n}=n+\frac{1}{n}$.

 $……..$

❸ Soit $\left(u\_{n}\right)$ la suite définie par $u\_{n}=\frac{1}{n^{2}+n}$.

$……… $

1. **Limites et comparaison**

**Théorème - Théorème de comparaison**

Soit $\left(u\_{n}\right)$ et $\left(v\_{n}\right)$ deux suites. On suppose qu'il existe un entier $n\_{0}$, tel que pour tout $n>n\_{0}$ , $u\_{n}\leq v\_{n}$.

* Si $\lim\_{n\to +\infty }u\_{n}=+\infty $alors $………………………….$
* Si $\lim\_{n\to +\infty }v\_{n}=-\infty $alors $…………………………$

**Exemples**

Sur les schémas suivants, on a représenté $\left(u\_{n}\right)$ en bleu et $\left(v\_{n}\right)$ en rouge avec $u\_{n}\leq v\_{n}$

① Les suites $\left(u\_{n}\right)$ et $\left(v\_{n}\right)$ tendent vers $+\infty $. ② Les suites $\left(u\_{n}\right)$ et $\left(v\_{n}\right)$ tendent vers $-\infty $.



**Démonstration**

Démontrons la première propriété. Soit $A > 0$.

…

**Théorème - Théorème des gendarmes**

Soit $\left(u\_{n}\right)$ , $\left(v\_{n}\right)$ et $\left(w\_{n}\right)$ trois suites, et $l$ un réel.

On suppose que :

* il existe un entier naturel $n\_{0}$ tel que pour tout entier $n\geq n\_{0}$, $………………………$ .
* $\lim\_{n\to +\infty }v\_{n}=\lim\_{n\to +\infty }w\_{n}= ………$

Alors la suite $\left(u\_{n}\right)$ converge et $\lim\_{n\to +\infty }u\_{n}= ……$

**Exemple**

Sur le schéma suivant, on a représenté $\left(u\_{n}\right)$ en bleu, $\left(v\_{n}\right)$ en rouge et $\left(w\_{n}\right)$ en vert.



**Propriété - Inégalités et limites**

Soit $\left(u\_{n}\right)$ et $\left(v\_{n}\right)$ deux suites convergentes.

On suppose qu'il existe un entier naturel $n\_{0}$ tel que pour tout entier $n\geq n\_{0}$ , $u\_{n}\leq v\_{n}$

Alors $……………………………………….$



**Exemple**

Sur le schéma suivant, on a représenté $\left(u\_{n}\right)$ en bleu et $\left(v\_{n}\right)$ en rouge.

1. **Suites géométriques et suites monotones**

**Propriété – Limite d’une suite géométrique**

Soit $q$ un réel.

* Si $q>1$, alors $…………………………$
* Si $-1<q<1 $, alors $…………………$
* Si $q=1$ , alors $………………………..$
* Si $q\leq -1$, alors …………………………

**Exemple**

$-1<\frac{1}{2}<1$, donc $\lim\_{n\to +\infty }\left(\frac{1}{2}\right)^{n}= ……$

**Démonstration**

* Si $q>1$

….

* Si $0<q<1$

….

* Si $-1<q<0$

….

**Définition - Suite majorée, minorée, bornée**

Soit $\left(u\_{n}\right)$ une suite définie à partir du rang $k$.

• On dit que $\left(u\_{n}\right)$ est majorée s'il existe un réel $M$ tel que ……………………………………………

• On dit que $\left(u\_{n}\right)$ est minorée s’il existe un réel $m$ tel que ……………………………………………

• On dit que $\left(u\_{n}\right)$ est bornée si $……………………………………………………….$

**Propriétés - Convergence d'une suite monotone**

① Toute suite croissante majorée ……………………….

② Toute suite croissante non majorée ……………………

③ Toute suite décroissante minorée …………………….

④ Toute suite décroissante non minorée ………………..

**Démonstration**

Démontrons la propriété ②

Soit $A > 0$.

……..

**Remarque**

Les réciproques des propriétés précédentes sont ……………………….

Par exemple la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie par $u\_{n}=n^{2}+\left(-1\right)^{n}$ …………………………………………………...