**Chapitre 1 – Suites et récurrence**

1. **Raisonnement par récurrence**

**Théorème - Principe du raisonnement par récurrence**

Soit une propriété dépendant d'un entier naturel . On suppose que :

➀

➁ Pour tout entier naturel fixé, si .

Alors pour tout entier naturel ,

**Théorème - Principe du raisonnement par récurrence à partir d'un certain rang**

Soit et une propriété définie pour . On suppose que :

➀

➁ Pour tout entier naturel

Alors pour tout entier naturel

**Remarque**

Pour démontrer par récurrence qu’une propriété est vraie pour tout entier naturel on procède en trois étapes.

**Étape ➀ - ………………………………**

On vérifie que la ………………………………………………….

**Étape ➁ - ……………………………….**

Soit un entier naturel tel que

On suppose que ………………………………………………………………………………

………………………………………………………………………………………………..

**Étape ➂ - ………………………………**

On conclut que

**Exemple**

Pour tout , on considère la propriété

…

**Propriété - Inégalité de Bernoulli**

Pour tout réel strictement positif et pour tout entier naturel : ……………………………..

**Démonstration**

Soit un réel positif.

…..

* **Méthodes 1 et 2 page 17**

1. **Limite d'une suite**

**Définition - Suite divergeant vers l'infini**

* On dit que la suite tend vers quand tend vers , si …………………………………….

………………………………………………………………………………………………………….

On dit que ……………………… et on note

Limite d'une suite 
Suite divergeant vers l'infini 
Définition 
• On dit que la suite (un) tend vers 
quand n tend vers +m, si pour tout réel A > O, 
l'intervalle IA ; + ml contient tous les termes 
de la suite à partir cf un certain rang. 
On dit que (un) diverge et on note lim un 
20 
Exemple 
Soit (un) la suite définie par un = n2 
Pour tout réel A > O, u > A en2>A 
• On dit que la suite (u ) tend vers —u 
quand n tend vers +m, si pour tout réel A > O, 
lintervalle J-m ; —A contient tous les termes 
de la suite à partir d'un certain rang. 
On dit que (un) divergeeton note lim u 
Donc l'intervalle IA ; contient tous les termes de la suite à partir du rang no, avec no = E(ü) + 1 
où E(x) désigne la entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. 
Donc la suite (un) tend vers + z. 
Suite convergeant vers un nombre réel 
Définition 
On cit que la suite (un) tend vers un réel e quand n tend vers +0', 
si tout intervalle ouvert contenant e contient tous les termes 
de la suite à partir d'un certain rang. 
On que (un) converge et on note lim un 
Remarque Tout intervalle ouvert contenant contient un intervalle ouvert centré en C, cest-à-dire de la 
o 
forme — e ; + el, avec e un réel strictement positif. 
On peut donc réécrire la définition : lim un si et seulement si pour toute > O, lintervalle —e ; + el 
contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. 
Unicité de la limite 
Théorème 
Lorsqtfelle existe, la limite est unique. 
Remarque Une suite qui ne converge pas, diverge. Elle peut soit diverger vers ou soitn'avoir pas 
o 
de limite. 
Par exemple, la suite (un) définie par un 1)" n'a pas de limite et prend alternativement les valeurs — 1 et 1. 

* On dit que la suite tend vers quand tend vers , si …………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………..

On dit que et on note.

Limite d'une suite 
Suite divergeant vers l'infini 
Définition 
• On dit que la suite (un) tend vers 
quand n tend vers +m, si pour tout réel A > O, 
l'intervalle IA ; + ml contient tous les termes 
de la suite à partir cf un certain rang. 
On dit que (un) diverge et on note lim un 
20 
Exemple 
Soit (un) la suite définie par un = n2 
Pour tout réel A > O, u > A en2>A 
• On dit que la suite (u ) tend vers —u 
quand n tend vers +m, si pour tout réel A > O, 
lintervalle J-m ; —A contient tous les termes 
de la suite à partir d'un certain rang. 
On dit que (un) divergeeton note lim u 
Donc l'intervalle IA ; contient tous les termes de la suite à partir du rang no, avec no = E(ü) + 1 
où E(x) désigne la entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. 
Donc la suite (un) tend vers + z. 
Suite convergeant vers un nombre réel 
Définition 
On cit que la suite (un) tend vers un réel e quand n tend vers +0', 
si tout intervalle ouvert contenant e contient tous les termes 
de la suite à partir d'un certain rang. 
On que (un) converge et on note lim un 
Remarque Tout intervalle ouvert contenant contient un intervalle ouvert centré en C, cest-à-dire de la 
o 
forme — e ; + el, avec e un réel strictement positif. 
On peut donc réécrire la définition : lim un si et seulement si pour toute > O, lintervalle —e ; + el 
contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. 
Unicité de la limite 
Théorème 
Lorsqtfelle existe, la limite est unique. 
Remarque Une suite qui ne converge pas, diverge. Elle peut soit diverger vers ou soitn'avoir pas 
o 
de limite. 
Par exemple, la suite (un) définie par un 1)" n'a pas de limite et prend alternativement les valeurs — 1 et 1. 

**Exemple**

Soit la suite définie par .

……

**Définition - Suite convergeant vers un nombre réel**

On dit que la suite tend vers un réel quand tend vers , si ………………………………..

………………………………………………………………………………………………………….

On que et on note .

Limite d'une suite 
Suite divergeant vers l'infini 
Définition 
• On dit que la suite (un) tend vers 
quand n tend vers +m, si pour tout réel A > O, 
l'intervalle IA ; + ml contient tous les termes 
de la suite à partir cf un certain rang. 
On dit que (un) diverge et on note lim un 
20 
Exemple 
Soit (un) la suite définie par un = n2 
Pour tout réel A > O, u > A en2>A 
• On dit que la suite (u ) tend vers —u 
quand n tend vers +m, si pour tout réel A > O, 
lintervalle J-m ; —A contient tous les termes 
de la suite à partir d'un certain rang. 
On dit que (un) divergeeton note lim u 
Donc l'intervalle IA ; contient tous les termes de la suite à partir du rang no, avec no = E(ü) + 1 
où E(x) désigne la entière de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. 
Donc la suite (un) tend vers + z. 
Suite convergeant vers un nombre réel 
Définition 
On cit que la suite (un) tend vers un réel e quand n tend vers +0', 
si tout intervalle ouvert contenant e contient tous les termes 
de la suite à partir d'un certain rang. 
On que (un) converge et on note lim un 
Remarque Tout intervalle ouvert contenant contient un intervalle ouvert centré en C, cest-à-dire de la 
o 
forme — e ; + el, avec e un réel strictement positif. 
On peut donc réécrire la définition : lim un si et seulement si pour toute > O, lintervalle —e ; + el 
contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. 
Unicité de la limite 
Théorème 
Lorsqtfelle existe, la limite est unique. 
Remarque Une suite qui ne converge pas, diverge. Elle peut soit diverger vers ou soitn'avoir pas 
o 
de limite. 
Par exemple, la suite (un) définie par un 1)" n'a pas de limite et prend alternativement les valeurs — 1 et 1. 

**Remarque**

Tout intervalle ouvert contenant contient un intervalle ouvert centré en , c’est-à-dire de la forme , avec un réel strictement positif.

On peut donc réécrire la définition : si et seulement si ………………………………………….

…………………………………………………………………………………………………………………..

**Théorème - Unicité de la limite**

Lorsqu’elle ………………………., la limite est …………………….

**Remarque**

Une suite qui ne converge pas, …………. Elle peut soit diverger vers ou soit n'avoir pas de limite.

Par exemple, la suite définie par n'a pas de limite ………………………………………..

* **Méthodes 3 page 19**

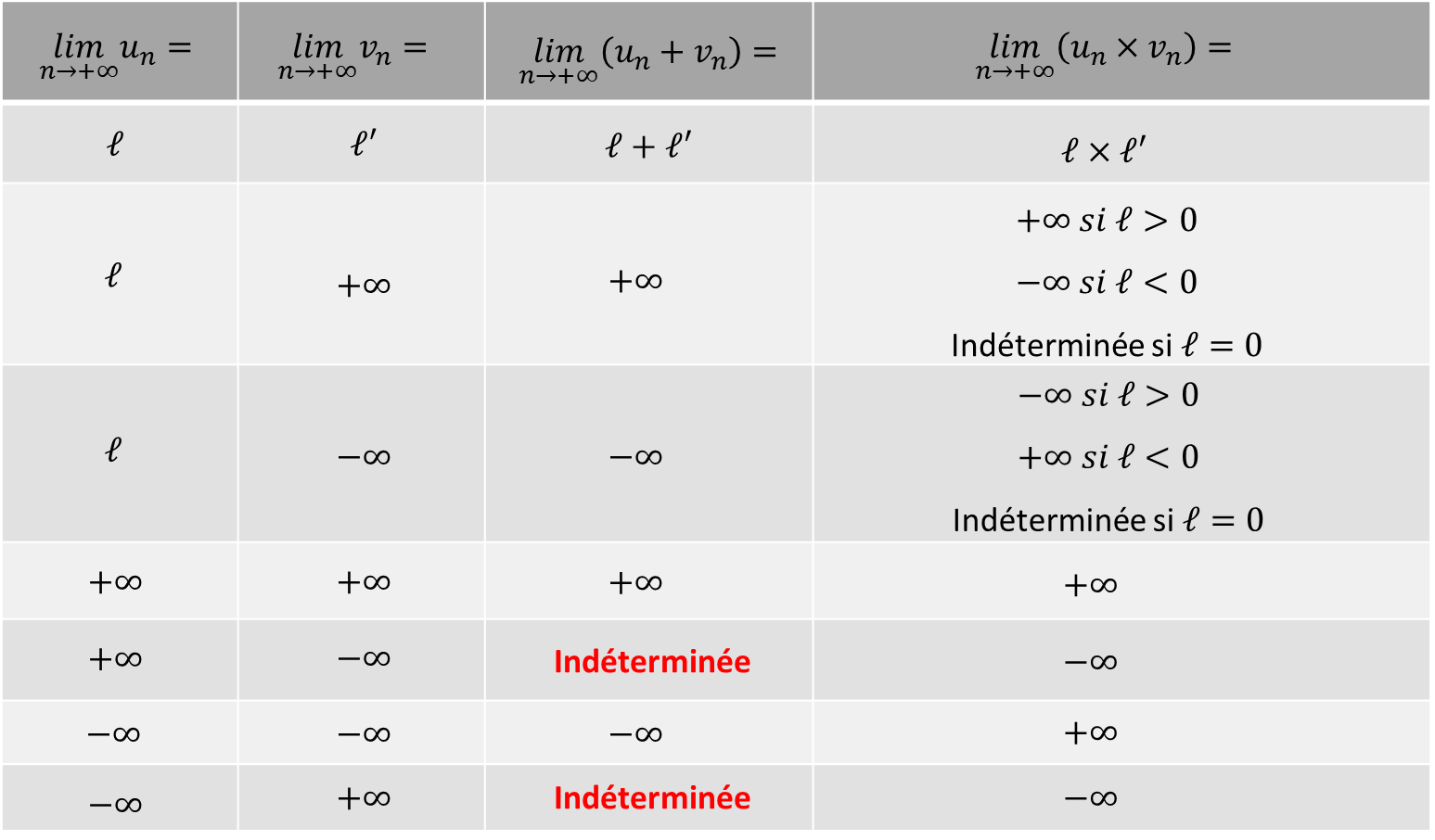
1. **Propriétés des limites**

**Propriété – Limite des suites de référence**

* Les suites et avec tendent vers quand tend vers ce qui s’écrit :
* Les suites et avec tendent vers quand tend vers ce qui s’écrit :

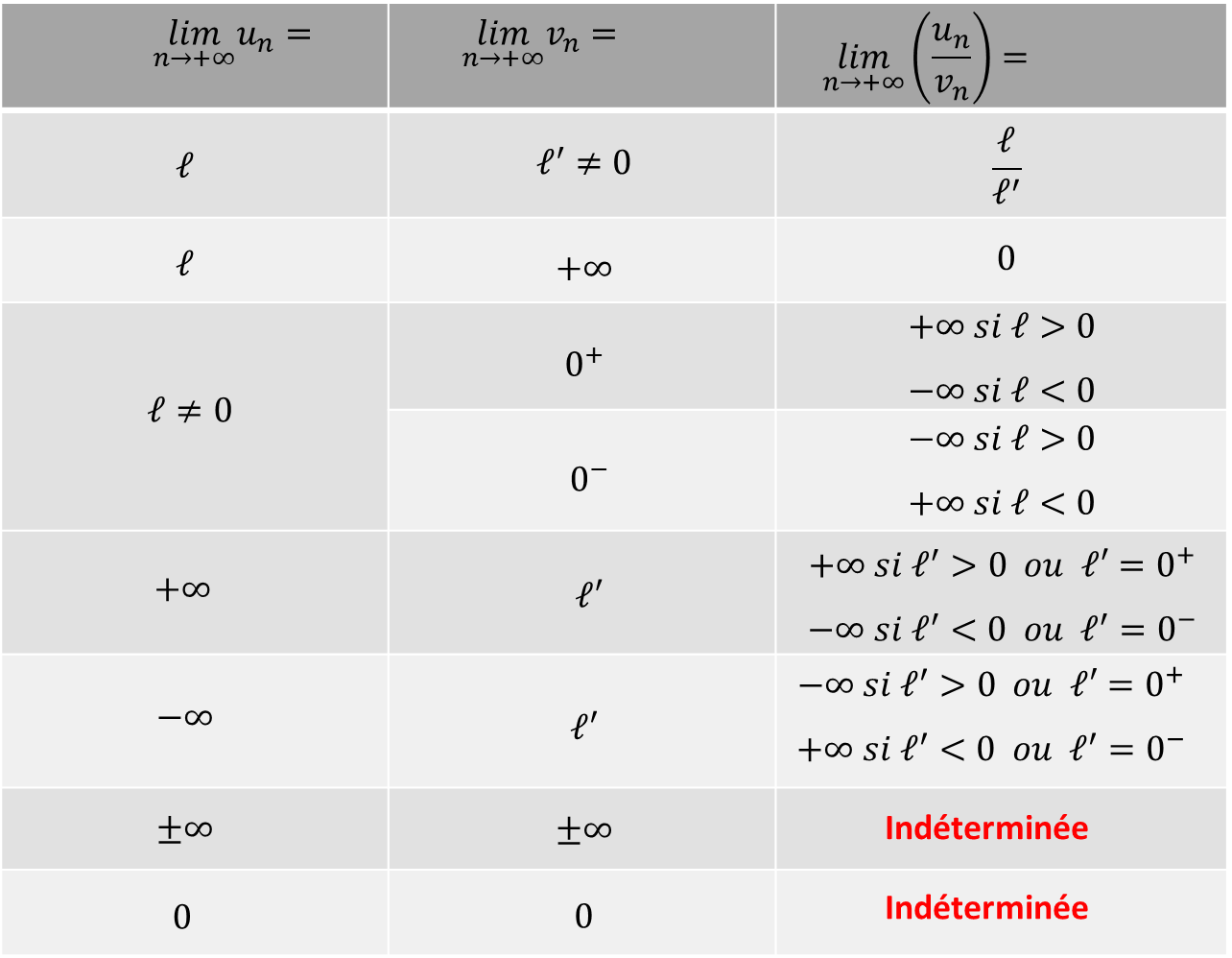
**Propriété - Limite d’une somme et d’un produit**

Soit et deux suites, et et deux réels.



**Propriété - Limite d’un quotient**

Soit et deux suites, et et deux réels.



**Remarques**

Dans les deux tableaux précédents :

① **indéterminée** signifie que c'est une **……………………….**, et qu'il n'y a pas de ………………………..

………………………………………………………………………………………………...

② (resp. ) signifie ………………………………………………………………………..

………………………………………………………………………………………………………………..

**Exemples**

❶ Soit la suite définie par

……

❷ Soit la suite définie par .

❸ Soit la suite définie par .

1. **Limites et comparaison**

**Théorème - Théorème de comparaison**

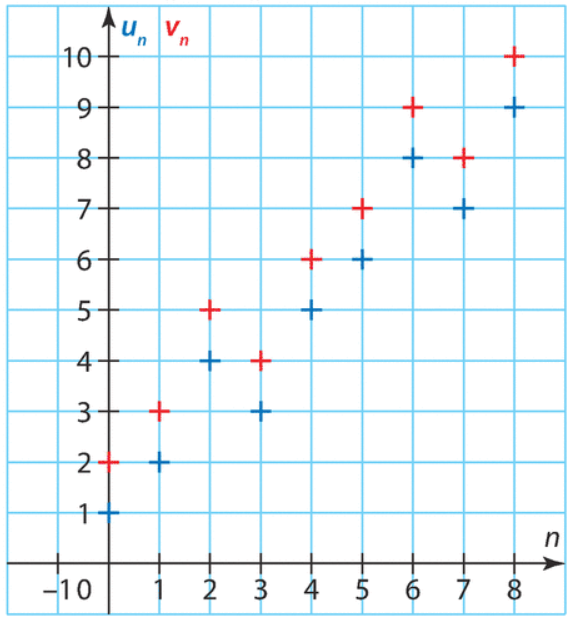
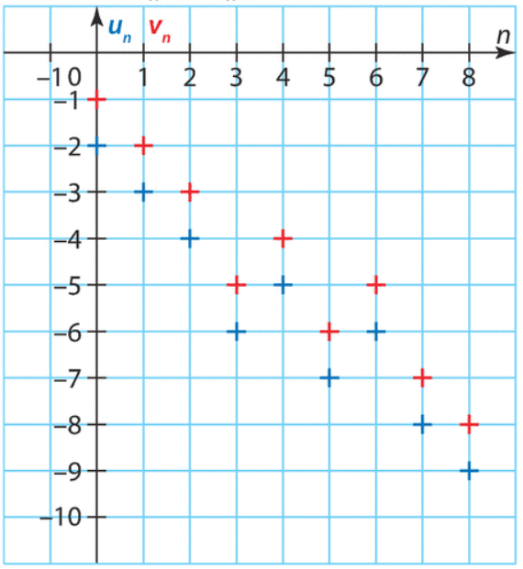
Soit et deux suites. On suppose qu'il existe un entier , tel que pour tout , .

* Si alors
* Si alors

**Exemples**

Sur les schémas suivants, on a représenté en bleu et en rouge avec

① Les suites et tendent vers . ② Les suites et tendent vers .



**Démonstration**

Démontrons la première propriété. Soit .

…

**Théorème - Théorème des gendarmes**

Soit , et trois suites, et un réel.

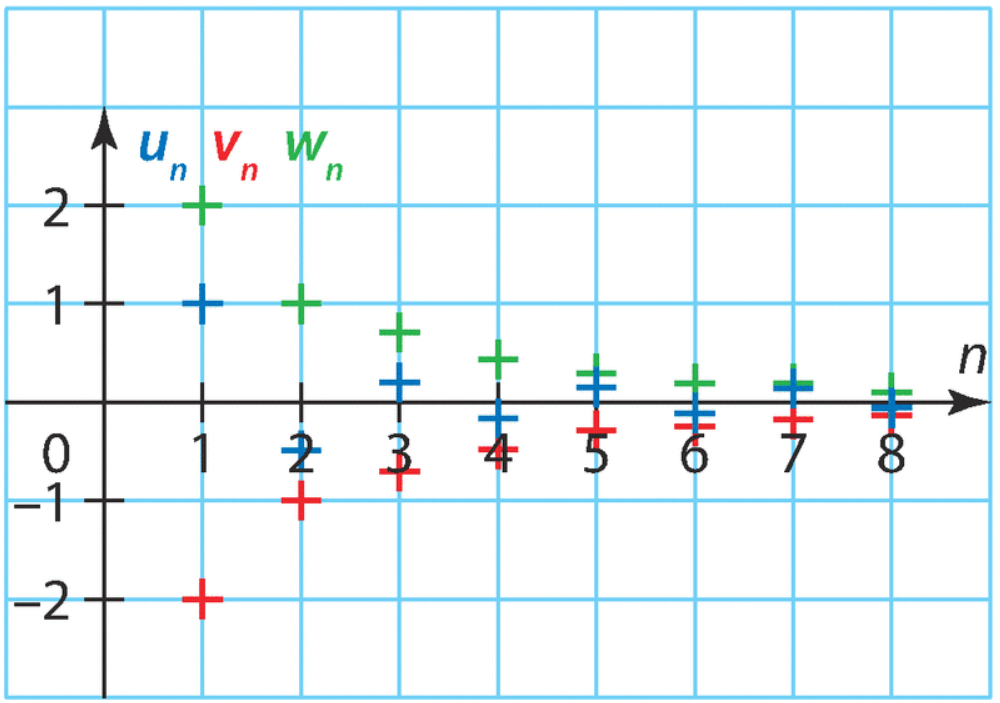
On suppose que :

* il existe un entier naturel tel que pour tout entier , .

Alors la suite converge et

**Exemple**

Sur le schéma suivant, on a représenté en bleu, en rouge et en vert.

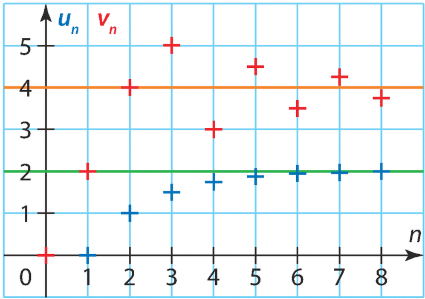


**Propriété - Inégalités et limites**

Soit et deux suites convergentes.

On suppose qu'il existe un entier naturel tel que pour tout entier ,

Alors



**Exemple**

Sur le schéma suivant, on a représenté en bleu et en rouge.

1. **Suites géométriques et suites monotones**

**Propriété – Limite d’une suite géométrique**

Soit un réel.

* Si , alors
* Si , alors
* Si , alors
* Si , alors …………………………

**Exemple**

, donc

**Démonstration**

* Si

….

* Si

….

* Si

….

**Définition - Suite majorée, minorée, bornée**

Soit une suite définie à partir du rang .

• On dit que est majorée s'il existe un réel tel que ……………………………………………

• On dit que est minorée s’il existe un réel tel que ……………………………………………

• On dit que est bornée si

**Propriétés - Convergence d'une suite monotone**

① Toute suite croissante majorée ……………………….

② Toute suite croissante non majorée ……………………

③ Toute suite décroissante minorée …………………….

④ Toute suite décroissante non minorée ………………..

**Démonstration**

Démontrons la propriété ②

Soit .

……..

**Remarque**

Les réciproques des propriétés précédentes sont ……………………….

Par exemple la suite définie par …………………………………………………...