

# Chapitre 1 – Suites et récurrence

## I. Raisonnement par récurrence

### Théorème - Principe du raisonnement par récurrence

Soit  $P(n)$  une propriété dépendant d'un entier naturel  $n$ . On suppose que :

- ① ... ..
  - ② Pour tout entier naturel  $n$  fixé, si ... ..
- Alors pour tout entier naturel  $n$ , ... ..

### Théorème - Principe du raisonnement par récurrence à partir d'un certain rang

Soit  $n_0 \in \mathbb{N}$  et  $P(n)$  une propriété définie pour ... .. On suppose que :

- ① ... ..
  - ② Pour tout entier naturel ... ..
- Alors pour tout entier naturel ... ..

### Remarque

Pour démontrer par récurrence qu'une propriété  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n \geq n_0$  on procède en trois étapes.

**Étape ①** - .....  
On vérifie que la .....

**Étape ②** - .....  
Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq n_0$   
On suppose que .....  
.....

**Étape ③** - .....  
On conclut que ... ..

### Exemple

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on considère la propriété  $P(n)$ : «  $3^n = 5 + 2n$  »

...

### Propriété - Inégalité de Bernoulli

Pour tout réel  $a$  strictement positif et pour tout entier naturel  $n$  : .....

### Démonstration

Soit  $a$  un réel positif.

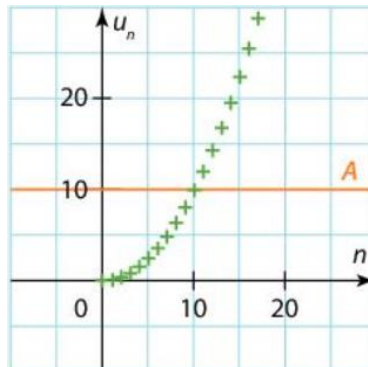
.....

➤ [Méthodes 1 et 2 page 17](#)

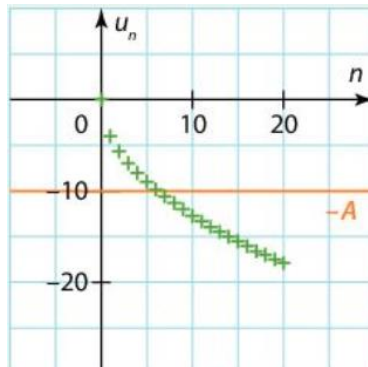
## II. Limite d'une suite

### Définition - Suite divergeant vers l'infini

- On dit que la suite  $(u_n)$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , si .....
- On dit que ..... et on note .....



- On dit que la suite  $(u_n)$  tend vers  $-\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , si .....
- On dit que ..... et on note.....



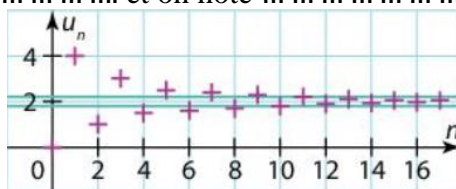
### Exemple

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = n^2$ .

.....

### Définition - Suite convergeant vers un nombre réel

- On dit que la suite  $(u_n)$  tend vers un réel  $l$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , si .....
- On que ..... et on note .....



### Remarque

Tout intervalle ouvert contenant  $l$  contient un intervalle ouvert centré en  $l$ , c'est-à-dire de la forme  $]l - \epsilon ; l + \epsilon[$ , avec  $\epsilon$  un réel strictement positif.

On peut donc réécrire la définition :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  si et seulement si .....

### Théorème - Unicité de la limite

Lorsqu'elle ....., la limite est .....

### Remarque

Une suite qui ne converge pas, ..... Elle peut soit diverger vers  $+\infty$  ou  $-\infty$  soit n'avoir pas de limite. Par exemple, la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = (-1)^n$  n'a pas de limite .....

➤ Méthodes 3 page 19

## III. Propriétés des limites

### Propriété – Limite des suites de référence

- Les suites  $(\sqrt{n})$ ,  $(n)$  et  $(n^k)$  avec  $k \in \mathbb{N}$  tendent vers ..... quand  $n$  tend vers ..... ce qui s'écrit :  
..... ; ..... ; .....
- Les suites  $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ ,  $(\frac{1}{n})$  et  $(\frac{1}{n^k})$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  tendent vers .... quand  $n$  tend vers ..... ce qui s'écrit :  
..... ; ..... ; .....

### Propriété - Limite d'une somme et d'un produit

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites, et  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) =$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) =$
$\ell$	$\ell'$		
$\ell$	$+\infty$		
$\ell$	$-\infty$		
$+\infty$	$+\infty$		
$+\infty$	$-\infty$		
$-\infty$	$-\infty$		
$-\infty$	$+\infty$		

### Propriété - Limite d'un quotient

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites, et  $\ell$  et  $\ell'$  deux réels.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n =$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n =$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{u_n}{v_n} \right) =$
$\ell$		
$\ell$		
$\ell \neq 0$		
$+\infty$		
$-\infty$		
$\pm\infty$		
$0$		

### Remarques

Dans les deux tableaux précédents :

- ① indéterminée signifie que c'est une ....., et qu'il n'y a pas de .....
- ②  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0^+$  (resp.  $0^-$ ) signifie .....

### Exemples

- ① Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = n\sqrt{n}$   
.....
- ② Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = n + \frac{1}{n}$ .  
.....
- ③ Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_n = \frac{1}{n^2+n}$ .  
.....

## IV. Limites et comparaison

### Théorème - Théorème de comparaison

Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites. On suppose qu'il existe un entier  $n_0$ , tel que pour tout  $n > n_0$ ,  $u_n \leq v_n$ .

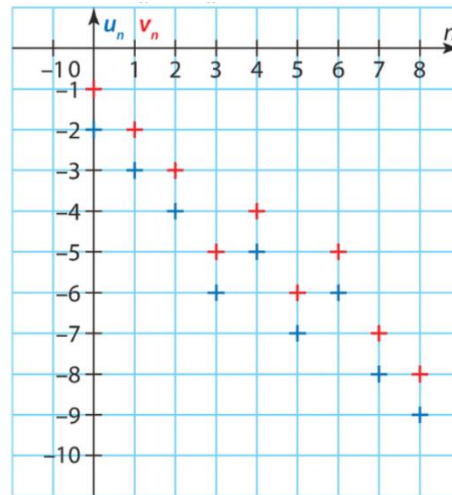
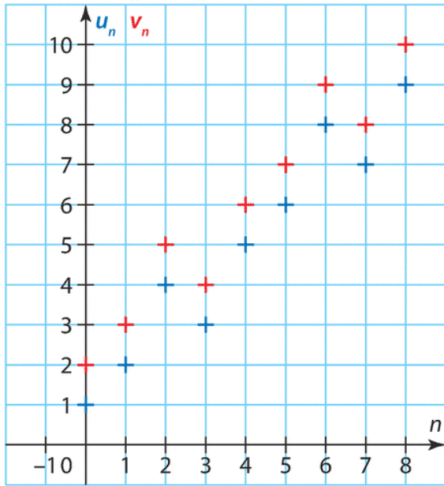
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  alors .....
- Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$  alors .....

## Exemples

Sur les schémas suivants, on a représenté  $(u_n)$  en bleu et  $(v_n)$  en rouge avec  $u_n \leq v_n$

① Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  tendent vers  $+\infty$ .

② Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  tendent vers  $-\infty$ .



## Démonstration

Démontrons la première propriété. Soit  $A > 0$ .

...

## Théorème - Théorème des gendarmes

Soit  $(u_n)$ ,  $(v_n)$  et  $(w_n)$  trois suites, et  $\ell$  un réel.

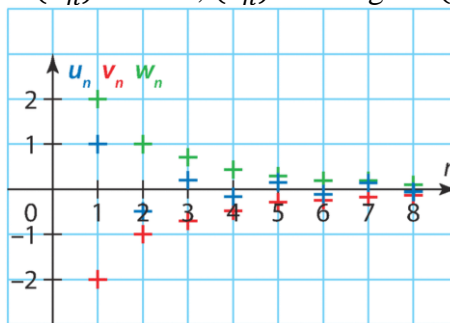
On suppose que :

- il existe un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$ , ... ..
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \dots$

Alors la suite  $(u_n)$  converge et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \dots$

## Exemple

Sur le schéma suivant, on a représenté  $(u_n)$  en bleu,  $(v_n)$  en rouge et  $(w_n)$  en vert.



## Propriété - Inégalités et limites

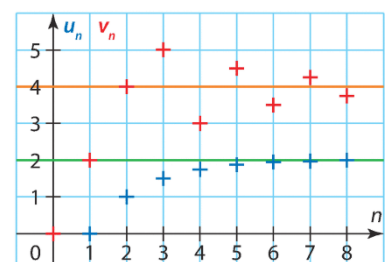
Soit  $(u_n)$  et  $(v_n)$  deux suites convergentes.

On suppose qu'il existe un entier naturel  $n_0$  tel que pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $u_n \leq v_n$

Alors ... ..

## Exemple

Sur le schéma suivant, on a représenté  $(u_n)$  en bleu et  $(v_n)$  en rouge.



## V. Suites géométriques et suites monotones

### Propriété – Limite d'une suite géométrique

Soit  $q$  un réel.

- Si  $q > 1$ , alors ... ..
- Si  $-1 < q < 1$ , alors ... ..
- Si  $q = 1$ , alors ... ..
- Si  $q \leq -1$ , alors .....

### Exemple

$-1 < \frac{1}{2} < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \dots$

### Démonstration

- Si  $q > 1$

....

- Si  $0 < q < 1$

....

- Si  $-1 < q < 0$

....

### Définition - Suite majorée, minorée, bornée

Soit  $(u_n)$  une suite définie à partir du rang  $k$ .

- On dit que  $(u_n)$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que .....
- On dit que  $(u_n)$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que .....
- On dit que  $(u_n)$  est bornée si .....

### Propriétés - Convergence d'une suite monotone

- ① Toute suite croissante majorée .....
- ② Toute suite croissante non majorée .....
- ③ Toute suite décroissante minorée .....
- ④ Toute suite décroissante non minorée .....

### Démonstration

Démontrons la propriété ②

Soit  $A > 0$ .

.....

### Remarque

Les réciproques des propriétés précédentes sont .....

Par exemple la suite  $(u_n)$  définie par  $u_n = n^2 + (-1)^n$  .....