Nombres complexes
Point de vue algébrique et polynômes

I. Ensemble des nombres complexes

Théorème – Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$ appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient .... ;
- il contient un nombre tel que $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$; ;
- il est muni d'une **...** qui ont les **mêmes .... que dans** $\mathbb{R}$, l'ensemble des nombres réels.

Exemples

- Les nombres -1 ; 0 ; $\frac{3}{4}$; $\sqrt{2}$ sont des nombres .... donc ce sont aussi des éléments de ...
- À l'aide du nombre i et de la multiplication : $-i$; $2i$; $\sqrt{2}i$ .. sont aussi ....
- Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans $\mathbb{C}$: $-1+i$; $\sqrt{2}+2i$.

Définition – Écriture algébrique

Tout nombre complexe peut s'écrire sous la forme : $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$. avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Cette écriture est appelée **..................................** de z :

- a est appelée **..............................** de z, notée $\operatorname{Re}(z)$.
- b est appelée **..............................** de z, notée $\operatorname{Im}(z)$.

Remarques

- Lorsque $\operatorname{Im}(z)=0$, $z=a$ est ....
- Lorsque $\operatorname{Re}(z)=0$, $z=b$ est appelé **...........................**

➢ **Méthode 1 – Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe (page 15)**

Théorème

Soient $z_1=a_1+ib_1$ et $z_2=a_2+ib_2$ deux nombres complexes :

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots \ldots & = & \ldots \ldots \\ \ldots \ldots & = & \ldots \ldots \end{cases}$$

L' écriture algébrique d'un nombre complexe est **.............**.

Démonstration

Soient $z_1=a_1+ib_1$ et $z_2=a_2+ib_2$ deux complexes tels que $z_1=z_2$.

……

Exemple

Soit $z=2x-1+i(3-y)$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, un complexe.

On a $z=0$ si et seulement si $\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$

➢ **Méthode 2 – Utiliser l'égalité de deux nombres complexes (page 15)**

II. Opérations dans $\mathbb{C}$

Théorème – Addition et multiplication

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec a_1, a_2, b_1, b_2 des nombres réels.

① $z_1 + z_2 =$ … … … … … … … … … … … … … … ….

② $z_1 \times z_2 =$ … … … … … … … … … … … … … … …

Démonstration

…..

Remarque

Dans la pratique, on se passe aisément de la formule en calculant avec les règles habituelles.

➢ **Méthode 3 – Calculer la somme te le produit de deux nombres complexes (page 17)**

Définition - Opposé

Pour tout nombre complexe z, il existe un unique nombre complexe z' tel que … … … … … … … …

z' est appelé opposé de z et on le note … … … …

Si $z = a + ib$ avec a et b deux nombres réels, alors $-z =$ … … … … … … … … … ….

Exemple

Si $z = 2 - 7i$ alors $-z =$ … … … … ….

Définition – Soustraction

Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes tels que $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec a_1, a_2, b_1, b_2 des nombres réels.

Alors $z_1 - z_2$ est défini par … … … … … .. et on a $z_1 - z_2 =$ … … … … … … … … … … … … … ….………

Exemple

Si $z_1 = 2 + 3i$ et $z_2 = -4 + 2i$ alors $z_1 - z_2 =$ … … … … … … … … … … … … … …

Définition - Inverse

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique nombre complexe z' tel que … … … … …..

z' est appelé inverse de z, et on le note … … … … .

Si $z = a + ib$ avec a et b deux nombres réels et $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z} =$ … … … … … … … ….

Démonstration

………………

Exemple

Si $z_1 = 2 + 3i$ alors $\frac{1}{z} =$ ….

Définition - Quotient

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z' \neq 0$. Alors $\frac{z}{z'}$ est défini par … … … … … ….

➢ **Méthode 4 – Calculer l'inverse et le quotient de nombres complexes (page 17)**

III. Conjugué d'un nombre complexe

Définition – Conjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ avec a et b deux nombres réels.
Alors le conjugué de z, noté …. … …. , est le nombre complexe défini par … … … … … … … … … …

Exemple

Le conjugué de $z = 3 + 2i$ est … … … … … … … … ….

Propriétés – Propriétés du conjugué

1. $z + \bar{z} =$ … … … … … ..
2. $z - \bar{z} =$ … … … … … …
3. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ … … … … … … ..
4. $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow$ … … … … … ….
5. $\bar{\bar{z}} =$ … ….

Démonstration

…..

Propriétés - Opérations avec les conjugués

Soient z et z' deux nombres complexes.

1) $\overline{-z} =$ … … . .

4) Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} =$ … … . .

2) $\overline{z + z'} =$ … … .

5) Si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} =$ … … . .

3) $\overline{z \times z'} =$ … … . .

6) $\overline{z^n} =$ … … . , n entier naturel

Démonstration

…..

Exemple

Démontrons que $S = (1 + i)^5 + (1 - i)^5$ est un nombre réel.

$$S \in \mathbb{R} \Leftrightarrow S = \bar{S}$$

… … …

- Méthode 5 – Déterminer et utiliser le conjugué d'un nombre complexe (page 19)
- Méthode 6 – Résoudre une équation faisant intervenir z et z' (page 19)

IV. Équations du second degré

Propriétés – Résolution d'une équation de la forme $z^2 = a$

Pour tout nombre réel non nul a, l'équation $z^2 = a$ admet deux racines dans :

- Si $a > 0$, les racines sont … … … et … … ….
- Si $a < 0$, les racines sont … … … …. et … … … ….

Exemples

Les solutions de : $z^2 = 16$ sont … … … … … ….

Les solutions de $z^2 = -5$ dans $\mathbb{C}$ sont … … … … … … … … … … … … (alors que cette équation n'a aucune ………………………………)

Propriétés – Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels

Soit $az^2 + bz + c = 0$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

- Si $\Delta = 0$, l'équation a …………………………………… : … … … … … … … … … … ..
- Si $\Delta > 0$, l'équation a ……………………………….. : … … … … … … … … … … … … ..
- $\Delta < 0$, l'équation a deux solution dans… … … … … .. qui sont ……………………….. :

  … ..
- Si $\Delta \neq 0$, alors $az^2 + bz + c =$ … … … … … … … … … … … … … … … …

Démonstration

………………………

Remarque

- Toute expression $Q(z) = az^2 + bz + c$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$, se factorise dans $\mathbb{C}$ et :

  $Q(z) = az^2 + bz + c =$ … … … … … … … … … … … ..

- $Q(z) = az^2 + bz + c = a(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.) = a(\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..)$ avec :

  $S =$ … … … … … … … … … et $P =$ … … … … … … … … ….

➢ Méthode 8 - Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ (page 21)

V. Factorisation et racines d'un polynôme

Définition - Polynôme de degré n à coefficients réels et racine

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Un polynôme P de degré n à coefficients réels est une expression décrivant sous la forme :
$$P(z) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$$
Avec $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ des réels tels que $\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$
- a est une racine de P si et seulement si $\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

Propriété - Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$

Soit n un nombre entier naturel non nul. Soit a un nombre complexe.
Pour tout nombre complexe z, on a : $z^n - a^n = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..$ avec Q un polynôme de degré au plus… … … … … … …

Démonstration

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère la propriété $P(n)$: :
« $z^n - a^n = (z-a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n-1$. ».

Initialisation : …

Hérédité : …

Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Propriété - Factorisation d'un polynôme par $z - a$

Soit P un polynôme de degré n et a un nombre complexe tel que $P(a) = 0$.
Alors pour tout nombre complexe z : $P(z) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$ avec Q un polynôme de degré au plus $\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$

Démonstration

Soit P un polynôme tel que $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$
.

…

- ➢ **Méthode 9 – Factoriser un polynôme de la forme $z^n - a^n$ (page 23)**

Propriété - Nombre de racines d'un polynôme

Un polynôme non nul de degré n admet au plus … … … …racines.

Corollaire - Nombre de solutions d'une équation polynomiale

Le nombre de solutions d'une équation polynômiale est ………………………………...

- ➢ **Méthode 10 – Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels (page 23)**