**Nombres complexes**

**Point de vue algébrique et polynômes**

## Ensemble des nombres complexes

**Théorème – Ensemble des nombres complexes**

Il existe un ensemble noté appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :

* contient ………………………………………. ;
* il contient un nombre tel que  ;
* il est muni d’une  **………………………………………………** qui ont les **mêmes …………………………….. que dans** , l’ensemble des nombres réels.

**Exemples**

* Les nombres sont des nombres ……… donc ce sont aussi des éléments de
* À l’aide du nombre et de la multiplication : sont aussi ………….. .
* Avec les additions, les nombres suivants sont aussi dans :

**Définition – Écriture algébrique**

Tout nombre complexe peut s’écrire sous la forme : avec .

Cette écriture est appelée **………………………………** de :

 • est appelée **………………………….** de , notée .

 • est appelée **………………………….** de , notée .

**Remarques**

 • Lorsque , est ……………

 • Lorsque , est appelé **………………………**.

* **Méthode 1 – Déterminer la forme algébrique d’un nombre complexe (page 15)**

**Théorème**

Soient et deux nombres complexes :

L’ écriture algébrique d’un nombre complexe est **…………..**.

**Démonstration**

Soient et deux complexes tels que .

……

**Exemple**

Soit , et , un complexe.

On a si et seulement si

* **Méthode 2 – Utiliser l’égalité de deux nombres complexes (page 15)**

## Opérations dans

**Théorème – Addition et multiplication**

Soit et deux nombres complexes tels que et avec des nombres réels.

①

②

**Démonstration**

…..

**Remarque**

Dans la pratique, on se passe aisément de la formule en calculant avec les règles habituelles.

* **Méthode 3 – Calculer la somme te le produit de deux nombres complexes (page 17)**

**Définition - Opposé**

Pour tout nombre complexe , il existe un unique nombre complexe tel que .

 est appelé opposé de et on le note

Si avec et deux nombres réels, alors

**Exemple**

Si alors

**Définition – Soustraction**

Soit et deux nombres complexes tels que et avec des nombres réels.

Alors est défini par et on a ……….

**Exemple**

Si et alors

**Définition - Inverse**

Pour tout nombre complexe non nul, il existe un unique nombre complexe tel que .

 est appelé inverse de , et on le note .

Si avec et deux nombres réels et , alors

**Démonstration**

……………….

**Exemple**

Si alors

**Définition - Quotient**

Soit et deux nombres complexes tels que . Alors est défini par .

* **Méthode 4 – Calculer l’inverse et le quotient de nombres complexes (page 17)**

## Conjugué d’un nombre complexe

**Définition – Conjugué d’un nombre complexe**

Soit un nombre complexe tel que avec et deux nombres réels.

Alors le conjugué de , noté , est le nombre complexe défini par .

**Exemple**

Le conjugué de est

**Propriétés – Propriétés du conjugué**

**Démonstration**

…..

**Propriétés - Opérations avec les conjugués**

Soient et deux nombres complexes.

**Démonstration**

…..

**Exemple**

Démontrons que est un nombre réel.

* **Méthode 5 – Déterminer et utiliser le conjugué d’un nombre complexe (page 19)**
* **Méthode 6 – Résoudre une équation faisant intervenir et (page 19)**

## Équations du second degré

**Propriétés – Résolution d’une équation de la forme**

Pour tout nombre réel non nul , l’équation admet deux racines dans :

* Si , les racines sont et
* Si , les racines sont et

**Exemples**

Les solutions de : sont

Les solutions de dans sont (alors que cette équation n’a aucune …………………………………)

**Propriétés – Résolution dans d’une équation du second degré à coefficients réels**

Soit , , et

 le discriminant de cette équation.

* Si , l’équation a ………………………………………. :
* Si , l’équation a ………………………………….. :
* , l’équation a deux solution dans qui sont ……………………….. :
* Si alors

**Démonstration**

……………………….

**Remarque**

* Toute expression , , et , se factorise dans et :

* avec :
* **Méthode 8 - Résoudre une équation du second degré dans (page 21)**

## Factorisation et racines d'un polynôme

**Définition - Polynôme de degré n à coefficients réels et racine**

* Soit . Un polynôme de degré à coefficients réels est une expression décrivant sous la forme :

Avec des réels tels que

* est une racine de si et seulement si

**Propriété - Factorisation de par**

Soit un nombre entier naturel non nul. Soit un nombre complexe.

Pour tout nombre complexe , on a : avec un polynôme de degré au plus.

**Démonstration**

Pour tout on considère la propriété :

 avec un polynôme de degré au plus . ».

Initialisation : …

Hérédité : …

Conclusion : on conclut que pour tout est vraie.

**Propriété - Factorisation d'un polynôme par**

Soit un polynôme de degré et un nombre complexe tel que .

Alors pour tout nombre complexe : avec un polynôme de degré au plus .

**Démonstration**

Soit un polynôme tel que

.

* **Méthode 9 – Factoriser un polynôme de la forme (page 23)**

**Propriété - Nombre de racines d'un polynôme**

Un polynôme non nul de degré admet au plus racines.

**Corollaire - Nombre de solutions d'une équation polynomiale**

Le nombre de solutions d’une équation polynômiale est ………………………………...

* **Méthode 10 – Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels (page 23)**