**Dérivation**

Soit une fonction définie sur un intervalle I et ( sa courbe représentative dans un repère . et

 désignent des réels de l'intervalle I. A et B sont des points de la courbe d'abscisses et .

1. **Taux de variation d’une fonction**



**Définition 1 - Taux de variation d'une fonction entre et**

On appelle taux de variation de entre et le quotient :

On le note parfois

**Remarque**

Le taux de variation deentre et correspond au ……………………. de la droite (AB) sécante à la courbe en A et B, c'est-à-dire .

**Exemple**

Le taux de variation de la fonction entre 4 et 7

**Remarque :**

Pour , on peut poser et le taux de variation entre et peut s’appeler le taux de variation entre et . On a alors :

Pour toute la suite du chapitre, les points :

 et appartiennent à la courbe .

**Définition 2 - Taux de variation d'une fonction entre et**

Pour , on appelle taux de variation de entre et le quotient :

**Définition et Propriété – Sécante à la courbe**

* La droite est appelèe ……………………………..
* Le coefficient directeur de la droite est égal à

Le taux de variation de entre et n'est pas défini pour .

Cela se traduit géométriquement par le fait qu'on ne peut pas définir de droite unique passant par A.

Un des buts du chapitre est de donner un sens à la « position limite des sécantes (AM) lorsque M tend vers A », c'est-à-dire lorsque « le nombre tend vers 0 ». Pour cela, on introduit la **notion de limite**.

1. **Nombre dérivé d’une fonction en un point**

Soit fune fonction définie sur un intervalle I et sa courbe représentative dans un repère . et

 désignent des réels de l'intervalle I. A et B sont des points de la courbe d'abscisses et .

**Définition - Nombre dérivé**

 Soit un réel non nul tel que appartienne à l'intervalle I.

On dit que est dérivable en a si et seulement si le ………………………. entre et tend vers un ……………………………………………………...

Ce nombre réel est appelé …………………………. en et se note

On écrit :

**Remarques :**

* L'expression « tend vers un nombre » signifie « …………………………………………………. ».
* On peut dire aussi que est dérivable en a si et seulement si le taux de variation entre et tend vers un unique nombre réel lorsque tend vers :

**Exemples**

① Considérons la fonction en .

② Considérons la fonction définie sur par en .

Exercice résolu 1page 124 (Sésamath)

**Remarque**

La définition du nombre dérivé peut s'interpréter de la façon suivante :

Si on nomme M le point de la courbe d'abscisse alors, lorsqu'on ……………………… M du point A sur la courbe jusqu'à ce qu'ils soient « presque » confondus, la « sécante ultime » (AM) (figure ci-dessous) a pour coefficient directeur .



1. **Tangente à la courbe représentative d’une fonction**

Soit une fonction définie sur un intervalle I et sa courbe représentative dans un repère .

 et désignent des réels de l'intervalle I.

A et B sont des points de la courbe d'abscisses et .

**Définition**

La droite passant par le point A et ayant pour coefficient directeur s'appelle la …………………………………………… (ou au point d'abscisse ).

**Exemple**

La courbe représentative de la fonction est une parabole qu'on nommera .

Si on place sur cette courbe le point A d'abscisse 3, alors la droite passant par A et qui a pour coefficient directeur 6 (car d'après l'exemple précédent ) est la tangente à en A.

**Théorème – Équation réduite de la tangente**

La tangente à la courbe en a pour équation réduite

Démonstration

….

**Remarque**

Sachant qu'au « voisinage de » la courbe et sa tangente en sont presque confondues, on dit que

 est une approximation affine de au voisinage de .

On a alors, pour tout réel très proche du réel a, .

On peut aussi écrire, si on pose avec proche de 0, .

1. **Fonction dérivée**
	1. **Fonction dérivée sur un intervalle**

**Définition – Fonction dérivée**

On dit qu'une fonction est **…………………………………………..** si elle est dérivable en tout réel de I.

Soit une fonction dérivable sur l’intervalle I.

On appelle **…………………………………………**, et on la note , la fonction qui à tout réel de I associe le réel

**Exemple**

Soit la fonction définie sur . Soit un réel et un réel non nul.

…

* 1. **Fonction dérivée des fonctions de référence**

**Théorèmes - Dérivées des fonctions de référence**

① Soit un réel. La fonction constante définie sur par est dérivable sur , et on a, pour tout réel ,

② Soit un réel. La fonction « identité » définie sur par est dérivable sur , et on a, pour tout réel , .

③ La fonction carrée définie sur par est dérivable sur , et on a, pour tout réel ,

④ La fonction inverse définie sur par est dérivable sur , et on a, pour tout réel ,

⑤ La fonction racine carrée définie sur par est dérivable sur , et on a, pour tout réel strictement positif,

⑥ Pour tout entier relatif , la fonction définie sur ( si est négatif) par est dérivable sur ( si est négatif) , et on a, pour tout réel (non nul si est négatif),

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Fonction | Définie sur | Dérivable sur | Fonction dérivée |
| Constante |  |  |  |  |
| Linéaire |  |  |  |  |
| Affine |  |  |  |  |
| Carré |  |  |  |  |
| Cube |  |  |  |  |
| Second degré |  |  |  |  |
| Puissance avec entier relatif non nul. |  |  si est positif. si est négatif |  si  si  |  |
| Inverse |  |  |  |  |
| Racine carrée |  |  |  |  |

**Exemple**

Soit la fonction .

Démonstration

Soit la fonction définie sur Soit et deux réels non nuls tels que soit non nul.

…

**Remarque**

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



1. **Opérations et dérivation**
	1. **Dérivée d'une somme de fonctions**

**Théorème - Dérivée d'une somme**

Si et sont deux fonctions dérivables sur un intervalle alors la fonction « somme »

 est dérivable sur . Et on a, pour tout réel de ,

On peut aussi noter

**Exemple**

Soit g la fonction définie sur par .

* 1. **Dérivée d'un produit de fonctions**

**Théorème - Dérivée d'un produit**

Si et sont deux fonctions dérivables sur un intervalle , alors la fonction « produit »

 est dérivable sur .

Et on a, pour tout réel de :

On note aussi

Démonstration

Soit un réel de et un réel non nul tel que appartient à .

Étudions le taux de variation de la fonction entre et :

**Exemple**

Soit la fonction définie sur par .

**Remarques**

① Si est une fonction définie et dérivable sur un intervalle et si est une constante réelle alors la fonction est dérivable sur . Et on a, pour tout réel de ,

On note

② Conséquence des théorèmes précédents (somme et produit) : toutes les fonctions polynômes sont dé-

rivables sur . Et en particulier la fonction affine définie sur par est dérivable sur , et on a, pour tout réel ,



③ La fonction valeur absolue peut être définie de la façon suivante :

Ainsi, on peut dire que la fonction est dérivable sur et, pour tout réel de cet intervalle

 et est dérivable sur ; et, pour tout réel de cet intervalle .

En revanche, la fonction valeur absolue n'est pas dérivable en 0.

**Exemple**

Soit la fonction définie sur .

* 1. **Dérivée d'un quotient de fonctions**

**Théorème - Dérivée de l’inverse d’une fonction**

Si est une fonction dérivable sur un intervalle et si, pour tout de , , alors la fonction est dérivable sur .

On a, pour tout réel de ,

On note

Démonstration

**Exemple**

Soit la fonction définie sur par

**Théorème - Dérivée d’un quotient**

Si et sont deux fonctions dérivables sur un intervalle et si, pour tout de , , alors la fonction « quotient » est dérivable sur .

Et on a, pour tout réel de ,

On note

**Exemple**

Soit la fonction définie sur par .

**Remarque**

Certaines fonctions sont de la forme mais il est souvent préférable de les écrire sous une autre forme plus simple à dériver.

Par exemple, la fonction définie sur par est de la forme avec et , mais comme on peut écrire , il est plus facile de la dériver avec la formule avec

 et ; on obtient donc .

Exercice résolu 4 page 126

* 1. **Composition de fonctions et dérivation**

**Définition - Composition de fonctions**

Soit une fonction définie sur un intervalle et une fonction définie sur un intervalle tel que, pour tout réel de , appartient à.

La fonction composée de suivie de est la fonction définie sur par

 ………………

**Exemple**

Soit la fonction définie sur par et la fonction définie sur par .

Alors la fonction , composée de suivie de , est définie sur car ….

**Théorème - Dérivée d'une fonction composée**

Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle et une fonction affine définie sur un intervalle par où et sont des réels tels que, pour tout réel de lintervalle , appartient à l’intervalle .

Alors la fonction composée de suivie de est dérivable sur , et on a pour tout réel de ,

**Exemple**

Étudions la dérivabilité de la fonction de l’exemple précédent.

 est définie sur par .

Exercice résolu n°5 p.127