$$\frac{\partial}{\partial a}\ln f_{a,\sigma^2}(\xi_1)=\frac{(\xi_1-a)}{\sigma^2}$$

$$\int_{R_n} T(x)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta} f(x,\theta)dx = \mathrm{M}\left(T(\xi)\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(\xi,\theta)\right)$$

$$\int_{R_n} T(x)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L(x,\theta)\right)\cdot f(x,\theta)dx=\int_{R_n} T(x)\cdot\left(\frac{\frac{\partial}{\partial\theta}f(x,\theta)}{f(x,\theta)}\right)f(x,\theta)dx$$

Dérivation

I. Taux de variation d’une fonction

II. Nombre dérivé d’une fonction en un point

III. Tangente à la courbe représentative d’une fonction

IV. Fonction dérivée

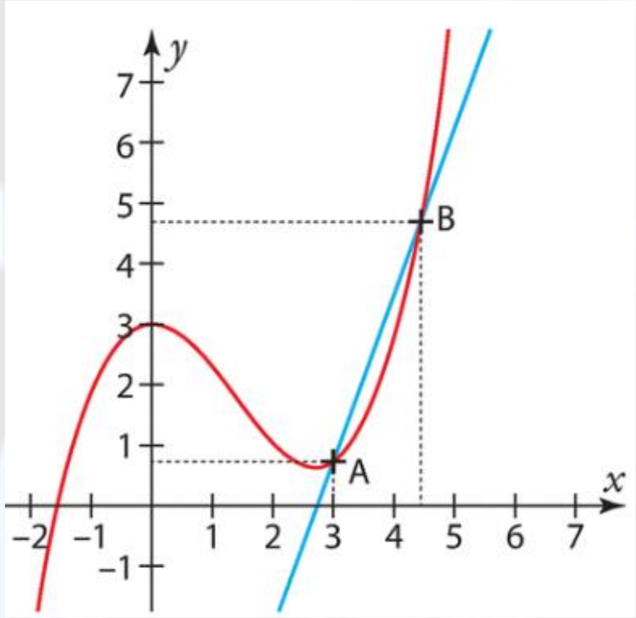
V. Opérations et dérivation

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O\,;\, I, J)$.

a et b désignent des réels de l'intervalle I.

A et B sont des points de la courbe (C_f) d'abscisses $x_A = a$ et $x_B = b$.

I. Taux de variation d'une fonction



Définition 1 - Taux de variation d'une fonction entre *a* et *b*

On appelle taux de variation de f entre a et b le quotient :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

On le note parfois $\frac{\Delta f}{\Delta x}(a; b)$

Remarque

Le taux de variation de f entre a et b correspond au coefficient directeur m de la droite (AB) sécante à la courbe (Cf) en A et B, c'est-à-dire $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Exemple

Le taux de variation de la fonction $f : x \longmapsto x^2 - 3x + 2$ entre 4 et 7 est égal à $\frac{f(7)-f(4)}{7-4}$

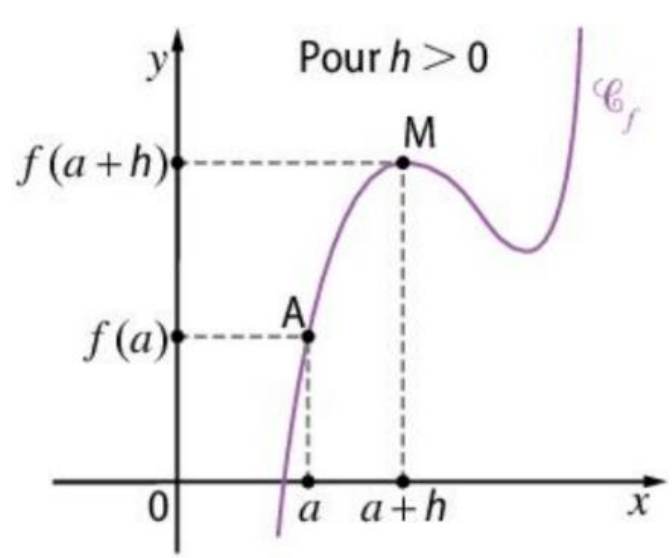
Or $f(7) = 7^2 - 3 \times 7 + 2 = 30$ et $f(4) = 4^2 - 3 \times 4 + 2 = 6$

Donc le taux de variation de f entre 4 et 7 est $\frac{\Delta f}{\Delta x}(4; 7) = \frac{30-6}{7-4} = \frac{24}{3} = 8$

On peut dire aussi que le coefficient directeur de la droite (AB), sécante à la courbe représentative de f en A(4 ; 6) et B(7 ; 30) est égal à 8.

Remarque :
Pour $h \neq 0$, on peut poser $b = a + h$ et le taux de variation entre a et b peut s'appeler le taux de variation entre a et $a + h$.
On a alors :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



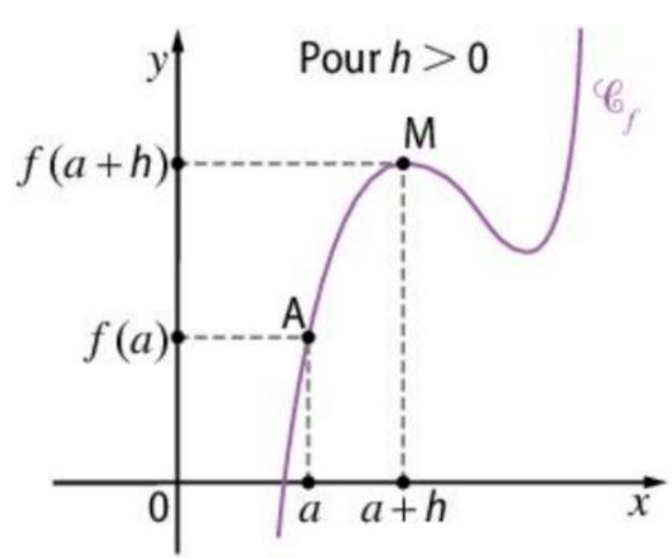
Pour toute la suite du chapitre, les points :
$A(a\,; f(a))$ et $M(a + h\,; f(a + h))$ appartiennent à la courbe (C_f).

Remarque :

Pour $h \neq 0$, on peut poser $b = a + h$ et le taux de variation entre a et b peut s'appeler le taux de variation entre a et $a + h$.

On a alors :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{a + h - a} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Pour toute la suite du chapitre, les points :

$A\big(a\,;f(a)\big)$ et $M\big(a+h\,;f(a+h)\big)$ appartiennent à la courbe (C_f).

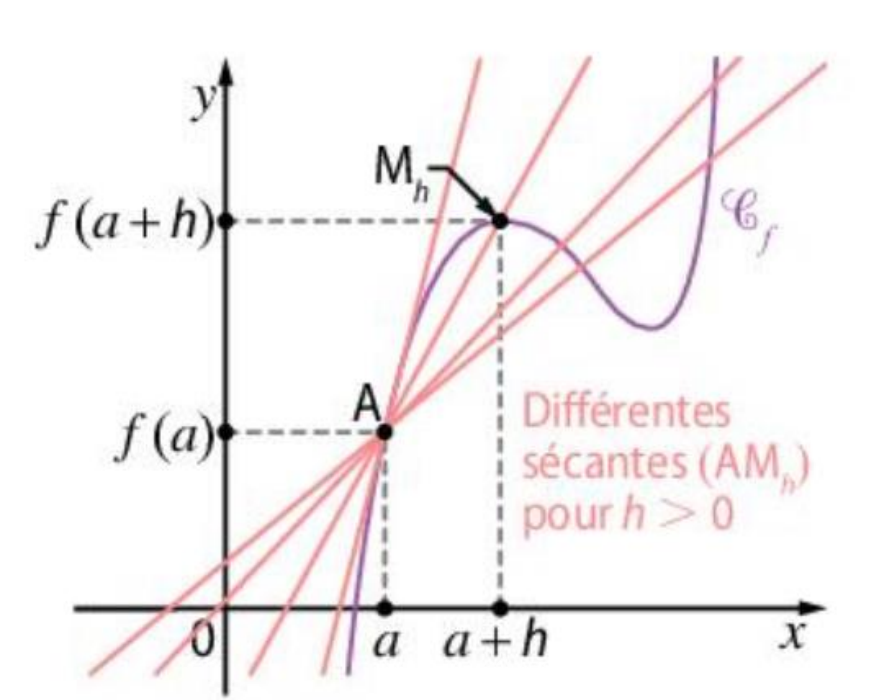
Définition 2 - Taux de variation d'une fonction entre a et $a + h$

Pour $h \neq 0$, on appelle taux de variation de f entre a et $a + h$ le quotient :

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Définition et Propriété – Sécante à la courbe

- La droite (AM) est appelée sécante à la courbe de f issue de A.
- Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$



Le taux de variation de f entre a et $a + h$ n'est pas défini pour $h = 0$.

Cela se traduit géométriquement par le fait qu'on ne peut pas définir de droite unique passant par A.

Un des buts du chapitre est de donner un sens à la « position limite des sécantes (AM) lorsque M tend vers A », c'est-à-dire lorsque « le nombre h tend vers 0 ».

Pour cela, on introduit la **notion de limite**.

II. Nombre dérivé d'une fonction en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (Cf) sa courbe représentative dans un repère $(O\ ;\ I, J)$.
a et b désignent des réels de l'intervalle I.
A et B sont des points de la courbe (C_f) d'abscisses $x_A = a$ et $x_B = b$.

Définition - Nombre dérivé

Soit h un réel non nul tel que $a + h$ appartienne à l'intervalle I.

On dit que f est dérivable en a si et seulement si le taux de variation de f entre a et $a + h$ tend vers un unique nombre réel lorsque h tend vers 0.

Ce nombre réel est appelé nombre dérivé de f en a et se note $f'(a)$.

On écrit :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Remarques :

- L'expression « tend vers un nombre » signifie « se rapproche de plus en plus de ce nombre ».
- On peut dire aussi que f est dérivable en a si et seulement si le taux de variation entre a et x tend vers un unique nombre réel $f'(a)$ lorsque x tend vers a : $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Exemples

① Considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2$ en $a = 3$.

Soit h un réel non nul. On sait que le taux de variation de f entre 3 et 3 + h est égal à :

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(3;3+h) = \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \frac{9+6h+h^2-9}{h} = \frac{h(6+h)}{h} = 6+h$$

Si h tend vers 0 alors $6+h$ tend vers 6.

Ainsi le taux de variation de f entre 3 et $3+h$ tend vers un unique nombre : 6.

Donc cela signifie que la fonction f est dérivable en 3 et son nombre dérivé en 3 est égal à 6.

On note $f'(3) = 6$.

② Considérons la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ en $a = 0$.

1 Déterminer un nombre dérivé

Cours 1 p. 116

Soit la fonction $f : x \mapsto (4 - x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.

1 Déterminer un nombre dérivé

Cours 1 p. 116

Soit la fonction $f : x \mapsto (4 - x)^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.

Solution

On détermine d'abord le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$, c'est-à-dire $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$. **1**

Or $f(1) = (4 - 1)^2 = 3^2 = 9$ **2**

et $f(1 + h) = (4 - (1 + h))^2 = (4 - 1 - h)^2 = (3 - h)^2 = 9 - 6h + h^2$

Donc $\dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{9 - 6h + h^2 - 9}{h} = \dfrac{h^2 - 6h}{h}$

$= \dfrac{h(h-6)}{h} = h - 6$ (pour $h \neq 0$).

Si h tend vers 0 **3** alors $h - 6$ tend vers -6 **4**.
Ainsi le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ tend vers un unique nombre fini : -6.

Cela signifie que la fonction f est dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est égal à -6. On note $f'(1) = -6$.

Conseils & Méthodes

1 Calculer le taux de variation entre 1 et $1 + h$ permet de répondre aux deux questions posées.

2 Il est souvent préférable de calculer au préalable $f(a)$ et $f(a + h)$.

3 Faire tendre h vers 0 signifie qu'il faut essayer « mentalement » (ou sur la calculatrice) plusieurs valeurs de h, de plus en plus « petites ». Par exemple $h = 0{,}01$, puis $h = 0{,}0001$, puis $h = 0{,}000001$, etc. On recommence avec $h = -0{,}01$, $h = -0{,}0001$, etc.

4 $h - 6$ tend vers -6 car, quelles que soient les valeurs de h essayées, le résultat est toujours très proche de -6 ; et plus h est proche de 0, plus $h - 6$ est proche de 6.

1 Soit la fonction $g : x \mapsto (x+2)^2$ définie sur $\mathbb{R}$.

Montrer que g est dérivable en -1 et déterminer $g'(-1)$.

2 Soit la fonction $h : x \mapsto \dfrac{-7}{3-x}$ définie sur $]-\infty\,;3[$.

Montrer que h est dérivable en 2 et déterminer $h'(2)$.

3 Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{5x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$.

Montrer que la fonction f est dérivable en 4 et déterminer $f'(4)$.

Remarque

La définition du nombre dérivé peut s'interpréter de la façon suivante :

Si on nomme M le point de la courbe (C_f) d'abscisse $x = a + h$ alors, lorsqu'on rapproche le point M du point A sur la courbe (C_f) jusqu'à ce qu'ils soient « presque » confondus, la « sécante ultime » (AM) (figure ci-dessous) a pour coefficient directeur $f'(a)$.

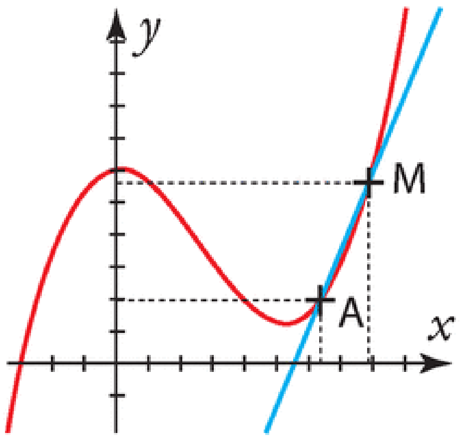


Figure 1

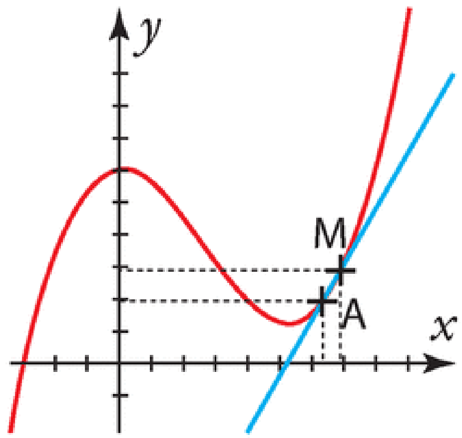


Figure 2

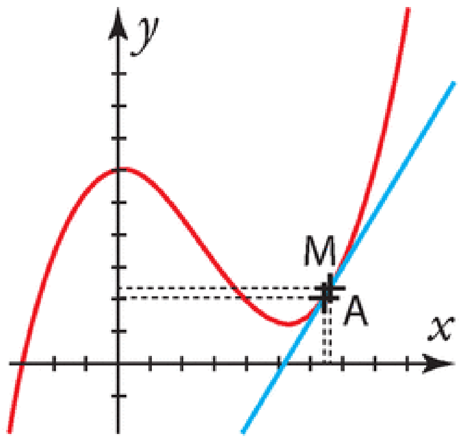


Figure 3

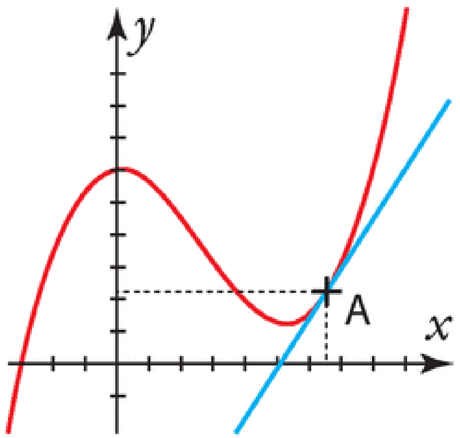


Figure 4

III. Tangente à la courbe représentative d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (C_f) sa courbe représentative dans un repère $(O\ ;\ I, J)$.
a et b désignent des réels de l'intervalle I.
A et B sont des points de la courbe (C_f) d'abscisses $x_A = a$ et $x_B = b$.

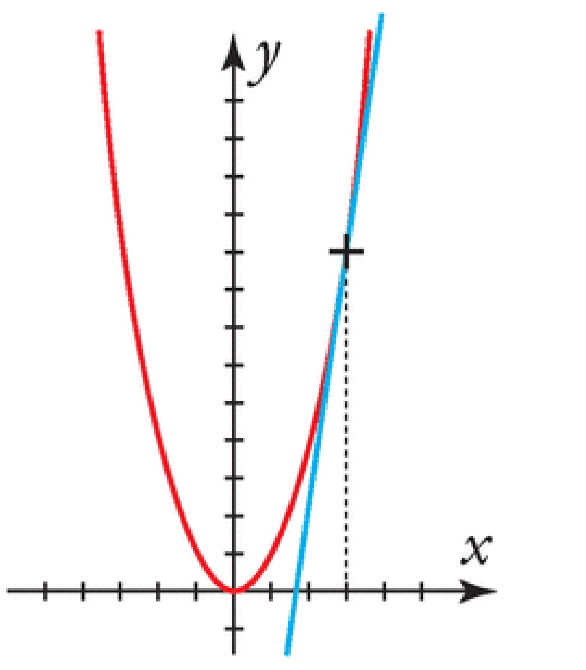
Définition

La droite passant par le point A et ayant pour coefficient directeur $f'(a)$ s'appelle la tangente à la courbe (C_f) en A (ou au point d'abscisse a).

Exemple

La courbe représentative de la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est une parabole qu'on nommera $\mathcal{P}$.

Si on place sur cette courbe le point A d'abscisse 3, alors la droite passant par A et qui a pour coefficient directeur 6 (car d'après l'exemple précédent $f'(3) = 6$) est la tangente à $\mathcal{P}$ en A.



Théorème – Équation réduite de la tangente

La tangente à la courbe (C_f) en A a pour équation réduite

$$y = f'(a) \times (x - a) + f(a)$$

Démonstration

D'après les définitions précédentes, la tangente à (C_f) en A admet $f'(a)$ pour coefficient directeur, elle a donc une équation de la forme $y = mx + p$, où m et p sont des réels tels que $m = f'(a)$.

Le point A est un point de la courbe (C_f) ses coordonnées sont donc $x_A = a$ et $y_a = f(a)$. C'est aussi un point de la tangente, donc ses coordonnées vérifient l'équation réduite.

Ainsi $y_A = m \times x_A + p$, c'est-à-dire $f(x_A) = mx_A + p$.

Donc $p = f(x_A) - mx_A = f(a) - f'(a) \times a$.

On en déduit que l'équation réduite peut s'écrire $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$.

Le premier et le dernier terme ont un facteur commun $f'(a)$, on obtient donc $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Remarque

Sachant qu'au « voisinage de a » la courbe (C_f) et sa tangente en a sont presque confondues, on dit que $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ est une **approximation affine** de f au voisinage de a.

On a alors, pour tout réel x très proche du réel a,

$$f(x) \approx f'(a)(x-a)+f(a)$$

On peut aussi écrire, si on pose $a + h$ avec h proche de 0,

$$f(a + h) \approx f'(a) \times h + f(a)$$

2 Déterminer l'équation réduite d'une tangente

Cours 1 p. 118

Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -1$.

Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

2 Déterminer l'équation réduite d'une tangente

Cours 1 p. 118

Soit une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2) = 5$ et $f'(2) = -1$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Solution

D'après le cours, l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2 peut s'obtenir avec la formule $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$. 1

Ainsi, avec les données de l'énoncé, on a $y = -1(x - 2) + 5$.

Ce qui donne $y = -x + 2 + 5$.

Et enfin $y = -x + 7$.

Conseils & Méthodes

1 Déterminer une équation réduite de tangente signifie déterminer une équation de droite de la forme $y = mx + p$ où m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine. Pour y parvenir on peut utiliser la formule $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ après avoir identifié a : ici $a = 2$.

4 Soit une fonction g définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g(4) = -1$ et $g'(4) = 2$. Soit $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 4.

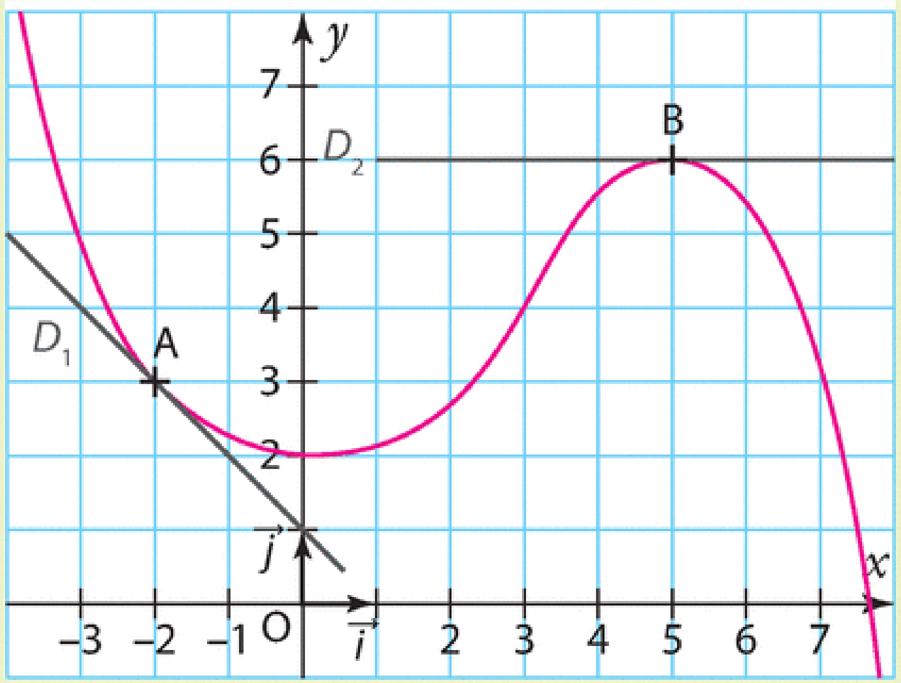
5 Soit une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $h(-3) = 7$ et $h'(-3) = -4$. Soit $\mathscr{C}_h$ sa courbe représentative. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_h$ au point d'abscisse -3.

3 Déterminer graphiquement un nombre dérivé

Cours 1 p. 118

Sur le graphique ci-contre, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction *f* sur l'intervalle [– 4 ; 8]. La droite D_1 est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse – 2 et la droite D_2 est tangente au point B d'abscisse 5.

Lire sur le graphique les valeurs de $f(-2)$, $f(5)$, $f'(-2)$ et $f'(5)$.

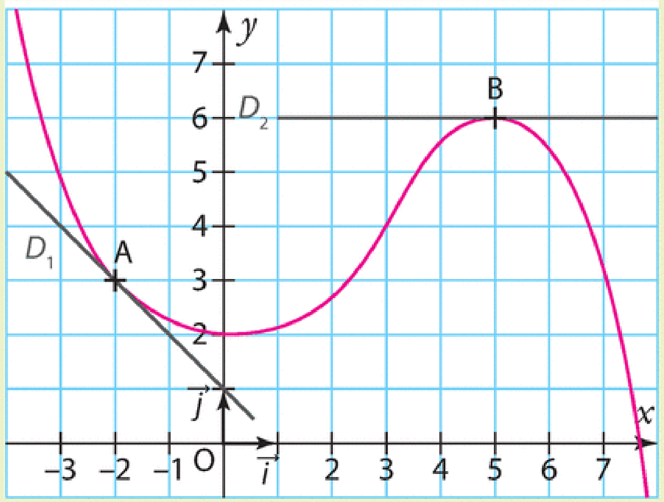


3 Déterminer graphiquement un nombre dérivé

Cours 1 p. 118

Sur le graphique ci-contre, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction *f* sur l'intervalle [– 4 ; 8]. La droite D_1 est tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse – 2 et la droite D_2 est tangente au point B d'abscisse 5.

Lire sur le graphique les valeurs de *f*(– 2), *f*(5), *f*′(– 2) et *f*′(5).



Solution

$f(-2)$ est l'ordonnée du point A de la courbe $\mathscr{C}_f$ d'abscisse -2, donc $f(-2) = 3$.

De la même façon, on obtient $f(5) = 6$.

$f'(-2)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A d'abscisse -2, c'est-à-dire le coefficient directeur m de la droite D_1 ; en observant le quadrillage on trouve $m = -1$. **1**

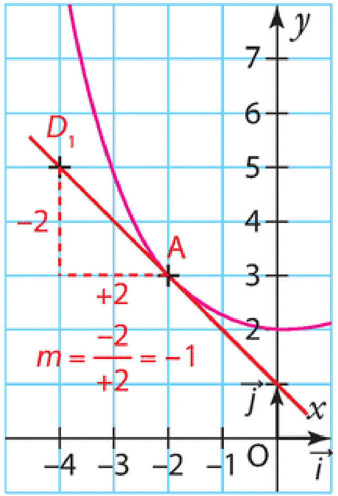
Donc $f'(-2) = -1$.

$f'(5)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point B d'abscisse 5, c'est-à-dire le coefficient directeur de la droite D_2 ; cette droite est parallèle à l'axe des abscisses, son coefficient directeur est donc égal à 0.

Donc $f'(5) = 0$.

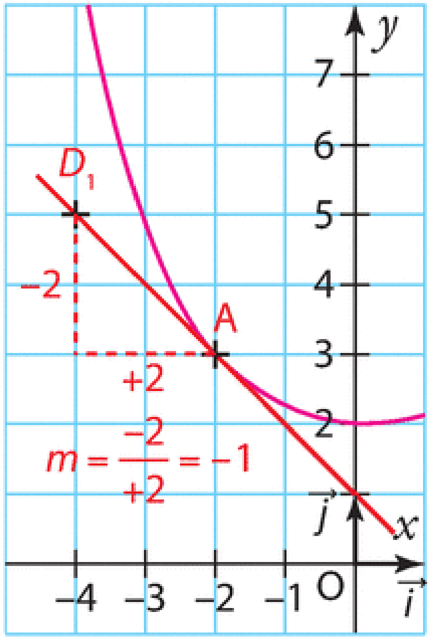
Conseils & Méthodes

1 Pour lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite, il suffit de choisir deux points distincts M et A sur la droite, puis de diviser l'écart « vertical » entre ces deux points $(y_A - y_M)$ par l'écart « horizontal » $(x_A - x_M)$. Attention au signe du résultat, il doit être négatif pour une droite décroissante.

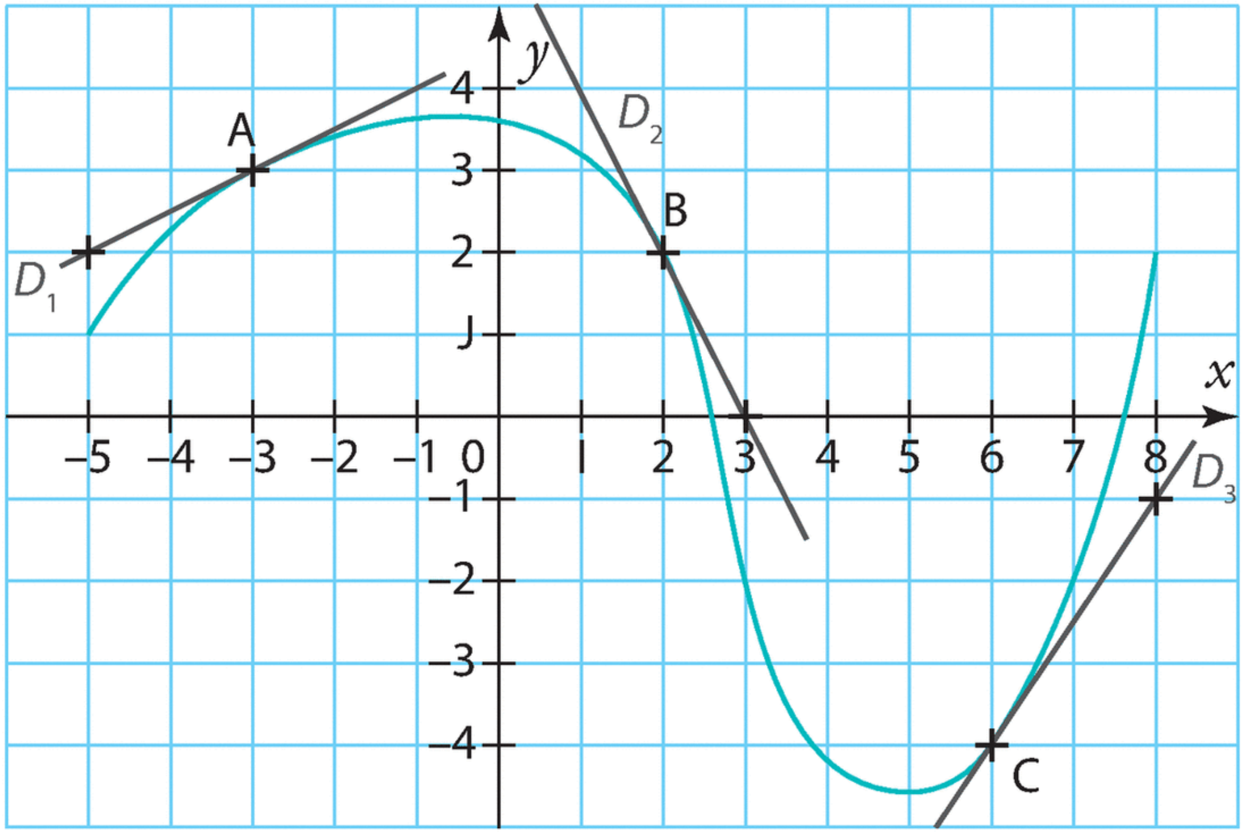


Conseils & Méthodes

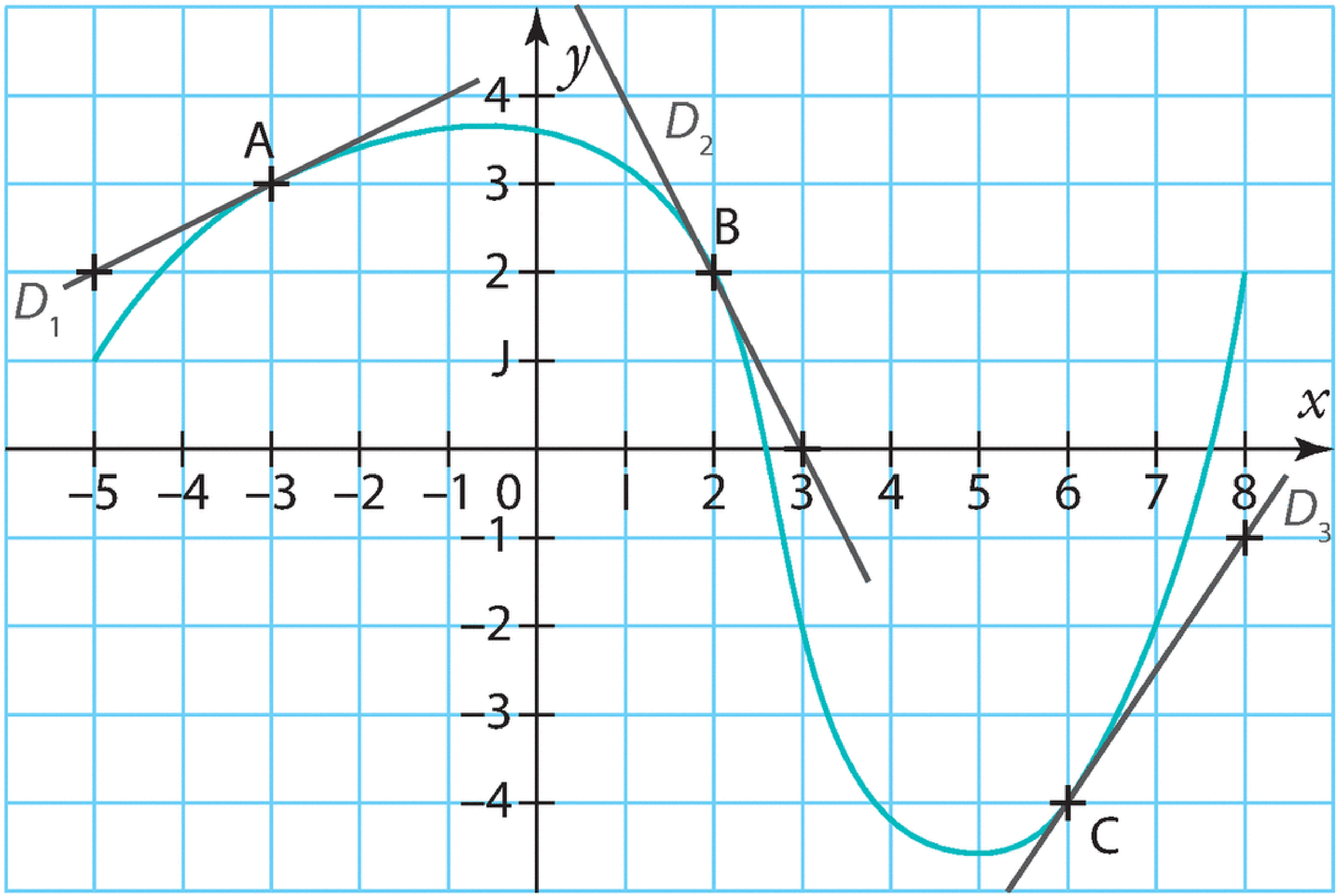
1 Pour lire graphiquement le coefficient directeur d'une droite, il suffit de choisir deux points distincts M et A sur la droite, puis de diviser l'écart « vertical » entre ces deux points $(y_A - y_M)$ par l'écart « horizontal » $(x_A - x_M)$. Attention au signe du résultat, il doit être négatif pour une droite décroissante.



6 Sur le graphique suivant, on donne la courbe représentative $\mathscr{C}_g$ d'une fonction g sur l'intervalle $[-5\,;8]$. Les droites D_1, D_2 et D_3 sont respectivement tangentes à $\mathscr{C}_g$ aux points A d'abscisse -3, B d'abscisse 2, et C d'abscisse 6.



Lire sur le graphique les valeurs de $g(-3)$, $g(2)$, $g(6)$ et $g'(-3)$, $g'(2)$, $g'(6)$.



Lire sur le graphique les valeurs de $g(-3)$, $g(2)$, $g(6)$ et $g'(-3)$, $g'(2)$, $g'(6)$.

IV. Fonction dérivée

1. Fonction dérivée sur un intervalle

Définition – Fonction dérivée

On dit qu'une fonction est **dérivable sur l'intervalle I** si elle est dérivable en tout réel a de I.

Soit f une fonction dérivable sur l'intervalle I.

On appelle **fonction dérivée de la fonction f**, et on la note f', la fonction qui à tout réel x de I associe le réel $f'(x)$.

Exemple

Soit la fonction $f: x \longmapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Soit a un réel et h un réel non nul.

Le taux de variation de f entre a et $a + h$ est égal à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{2ah + h^2}{h} = 2a + h$$

Quel que soit le réel a, si h tend vers 0 alors le taux de variation entre a et $a + h$ tend vers un unique nombre : $2a$.

Donc cela signifie que, quel que soit le réel a, la fonction f est dérivable en a et son nombre dérivé en a, $f'(a)$, est égal à $2a$.

On peut donc dire que la fonction $f: x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa fonction dérivée f' est la fonction qui à tout réel x associe $f'(x) = 2x$.

2. Fonction dérivée des fonctions de référence

Théorèmes - Dérivées des fonctions de référence

① Soit c un réel. La fonction constante définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \longmapsto c$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x, $f'(x) = 0$.

② Soit m un réel. La fonction « identité » définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \longmapsto x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x, $f'(x) = 1$.

③ La fonction carrée définie sur $\mathbb{R}$ par $f: x \longmapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x, $f'(x) = 2x$.

④ La fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f: x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et on a, pour tout réel x, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

⑤ La fonction racine carrée définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f: x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, et on a, pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

⑥ Pour tout entier relatif n, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ si n est négatif) par $f: x \longmapsto x^n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ si n est négatif), et on a, pour tout réel x (non nul si n est négatif), $f'(x) = nx^{n-1}$.

Fonction		Définie sur	Dérivable sur	Fonction dérivée
Constante	$f : x \longmapsto c$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f : x \longmapsto 0$
Linéaire	$f : x \longmapsto mx$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f : x \longmapsto m$
Affine	$f : x \longmapsto mx + p$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f : x \longmapsto m$
Carré	$f : x \longmapsto x^2$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f : x \longmapsto 2x$
Cube	$f : x \longmapsto x^3$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f : x \longmapsto 3x^2$
Second degré	$f : x \longmapsto ax^2 + bx + c$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f : x \longmapsto 2ax + b$
Puissance avec n entier relatif non nul.	$f : x \longmapsto x^n$	$\mathbb{R}$ si n est positif. $\mathbb{R}^*$ si n est négatif	$\mathbb{R}$ si n est positif. $\mathbb{R}^*$ si n est négatif	$f : x \longmapsto nx^{n-1}$
Inverse	$f : x \longmapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$f : x \longmapsto -\frac{1}{x^2}$
Racine carrée	$f : x \longmapsto \sqrt{x}$	$[0\,;\,+\infty[$	$]0\,;+\infty[$	$f : x \longmapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Démonstration

Soit la fonction $f: x \longmapsto \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

Soit a et h deux réels non nuls tels que $a + h$ soit non nul.

On sait que le taux de variation de f entre a et $a + h$ est égal à :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a}{a(a+h)}-\frac{a+h}{a(a+h)}}{h} = \frac{-\frac{h}{a^2+ah}}{h} = -\frac{1}{a^2+ah} \quad pour\ h \neq 0$$

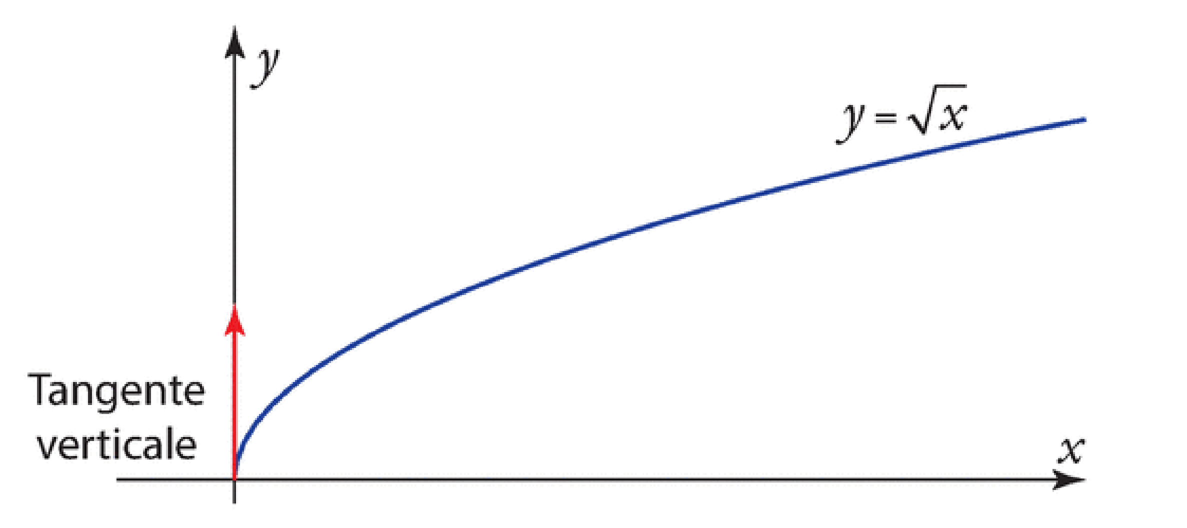
Quel que soit le réel non nul a, si h tend vers 0, alors le taux de variation entre a et $a + h$ tend vers un unique nombre fini : $-\frac{1}{a^2}$.

Donc cela signifie que la fonction f est dérivable en a et son nombre dérivé en a est égal à $-\frac{1}{a^2}$

Ainsi on a, pour tout réel x non nul, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

Remarque

La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.



V. Opérations et dérivation

1. Dérivée d'une somme de fonctions

Théorème - Dérivée d'une somme

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction « somme »

$u + v : x \longmapsto u(x) + v(x)$ est dérivable sur I.

Et on a, pour tout réel x de I,

$$(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$$

On peut aussi noter $(u + v)' = u' + v'$

Exemple

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = x^3 + \frac{1}{x}$.

g est de la forme $u + v$ avec $u: x \longmapsto x^3$ (dérivable sur $\mathbb{R}$, donc aussi sur $\mathbb{R}^*$) et $v: \longmapsto \frac{1}{x}$ (dérivable sur $\mathbb{R}^*$).
Donc g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et on a $g'(x) = u'(x) + v'(x)$.

Or, d'après les théorèmes de dérivation des fonctions de référence, $u'(x) = 3x^2$ et $v'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Donc, pour tout réel x non nul, on a $g'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}$.

2. Dérivée d'un produit de fonctions

Théorème - Dérivée d'un produit

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction « produit »

$$uv : x \longmapsto u(x) \times v(x) \text{ est dérivable sur } I.$$

Et on a, pour tout réel x de I ,

$$(uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$$

On note aussi:

$$(uv)' = u'v + uv'$$

2. Dérivée d'un produit de fonctions

Théorème - Dérivée d'un produit

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors la fonction « produit » $uv : x \longmapsto u(x) \times v(x)$ est dérivable sur I.

Et on a, pour tout réel x de I , $(uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$

On note aussi: $(uv)' = u'v + uv'$

Démonstration

Soit a un réel de I et h un réel non nul tel que $a + h$ appartient à I.
Étudions le taux de variation de la fonction (uv) entre a et $a + h$:

$$\frac{(uv)(a+h) - (uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h) \times v(a+h) - u(a) \times v(a) + u(a+h) \times v(a) - u(a+h) \times v(a)}{h}$$

$$= \frac{\big(u(a+h) - u(a)\big) \times v(a) + u(a+h) \times \big(v(a+h) - v(a)\big)}{h}$$

$$= \frac{\big(u(a+h) - u(a)\big)}{h} \times v(a) + \frac{\big(v(a+h) - v(a)\big)}{h} u(a+h)$$

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h} \times v(a) + \frac{v(a+h)-v(a)}{h} u(a+h)$$

Or u et v sont dérivables donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h \to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

De plus, on admet que la fonction u étant dérivable sur I alors $\lim\limits_{h \to 0} u(a+h) = u(a)$;

autrement dit, on admet que si $a + h$ se rapproche de a alors $u(a + h)$ se rapproche de $u(a)$.

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

Cela signifie que la fonction (uv) est dérivable en a et que, pour tout réel x de I,

$$(uv)'(x) = u'(x) \times v(x) + v'(x) \times u(x)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$.

Remarques

① Si u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et si k est une constante réelle alors la fonction $ku : x \longmapsto k \times u(x)$ est dérivable sur I.

Et on a, pour tout réel x de I, $(ku)'(x) = k \times u'(x)$.

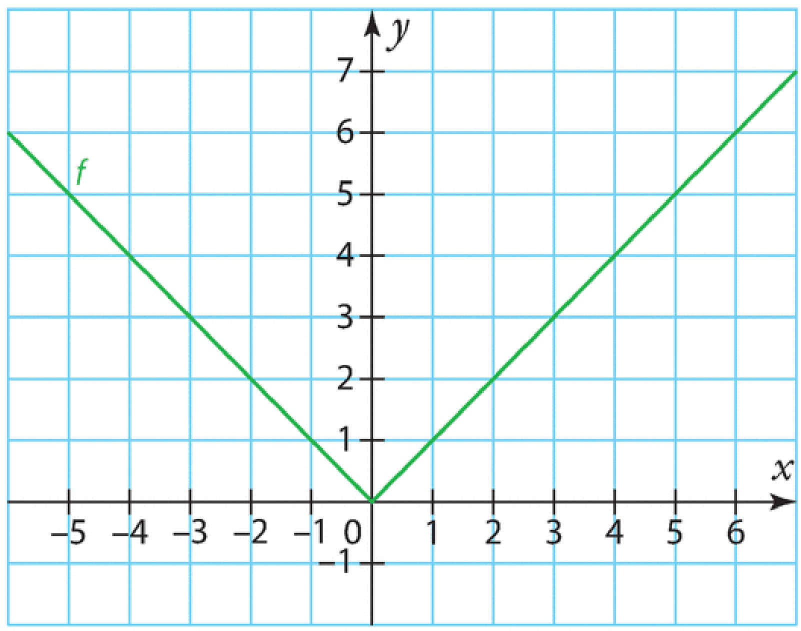
On note $(ku)' = k \times u'$.

② Conséquence des théorèmes précédents (somme et produit) : toutes les fonctions polynômes sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Et en particulier la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto mx + p$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout réel x, $f'(x) = m$.

③ La fonction valeur absolue $f : x \longmapsto |x|$ peut être définie de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(x) = x \quad si\ x \geq 0 \\ f(x) = -x \quad si\ x < 0 \end{cases}$$



Ainsi, on peut dire que la fonction $f : x \longmapsto |x|$ est dérivable sur $[0\ ;\ +\infty\ [$et, pour tout réel x de cet intervalle $f'(x) = 1$

f est dérivable sur $]-\infty\ ; 0[$; et, pour tout réel x de cet intervalle $f'(x) = -1$.

En revanche, la fonction valeur absolue f n'est pas dérivable en 0 (voir exercice 72).

Exemple

Soit la fonction $f : x \longmapsto 5x^3$ définie sur $\mathbb{R}$.

$f$est de la forme $ku : x \longmapsto k \times u(x)$ avec $k = 5$ et $u(x) = x^3$.

Or u est la fonction cube dérivable sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x, $u'(x) = 3x^2$ donc, pour tout réel x, $f'(x) = 5 \times 3x^2 = 15x^2$

Ainsi on peut dire que la fonction $f : x \longmapsto 5x^3$ a pour fonction dérivée la fonction $f' \longmapsto 15x^2$.

3. Dérivée d'un quotient de fonctions

Théorème - Dérivée de l’inverse d’une fonction

Si v est une fonction dérivable sur un intervalle I et si, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$, alors la fonction

$$\frac{1}{v} : x \longmapsto \frac{1}{v(x)}$$ est dérivable sur I

On a, pour tout réel x de I,

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)}$$

On note

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$$

Dém: $1 = \frac{v}{v}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+7}$

f est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v(x) = x^2 + 7$.

Or v est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $v(x) \neq 0$.

Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

De plus, pour tout réel x, $v'(x) = 2x$.

Donc, pour tout réel x, on a $f'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)} = -\frac{2x}{(x^2+7)^2}$.

Théorème - Dérivée d'un quotient

Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I et si, pour tout x de I, $v(x) \neq 0$,

alors la fonction « quotient »

$$\frac{u}{v} : x \longmapsto \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{est dérivable sur } I.$$

Et on a, pour tout réel x de I,

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$$

On note

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $I =]-4\,;\,+\infty[$ par $x \longmapsto \frac{-7x+5}{x+4}$.

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = -7x + 5$ et $v(x) = x + 4$. Or u et v sont des fonctions affines dérivables sur $\mathbb{R}$ (donc en particulier sur l'intervalle I). D'autre part $v(x) = 0$ si et seulement si $x = -4$, donc pour tout réel x de I, Ainsi f est dérivable sur I.

De plus, pour tout réel x de I : $u'(x) = -7$ et $v'(x) = 1$.

Donc, pour tout réel x de I, on a :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)} = \frac{-7(x+4) - (-7x+5) \times (1)}{(x+4)^2}$$

$$= \frac{-7x - 28 + 7x - 5}{(x+4)^2} = \frac{-33}{(x+4)^2}$$

<u>Conclusion :</u> la fonction dérivée de $f : x \longmapsto \frac{-7x+5}{x+4}$ est la fonction $f' : x \longmapsto -\frac{33}{(x+4)^2}$

Remarque

Certaines fonctions sont de la forme $\frac{u}{v}$ mais il est souvent préférable de les écrire sous une autre forme plus simple à dériver.

Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$par $f : x \longmapsto \frac{2}{x}$ est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2$ et $v(x) = x$, mais comme on peut écrire $f(x) = 2 \times \frac{1}{x}$, il est plus facile de la dériver avec la formule ku avec $k = 2$ et $u(x) = \frac{1}{x}$; on obtient donc $f'(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2}$.

Exercice résolu 4 page 126

4 Déterminer une fonction dérivée

Cours 3 p. 120

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer sur quel ensemble elle est dérivable puis déterminer sa dérivée .

a) $f : x \mapsto 9x^4$ définie sur $\mathbb{R}$

b) $h : x \mapsto \frac{3}{4}x - 7$ définie sur $\mathbb{R}$

c) $i : x \mapsto \sqrt{x}(3x-1)$ définie sur $[0 ; +\infty[$

d) $j : x \mapsto \frac{x^3}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$

Exercice résolu 4 page 126

4 Déterminer une fonction dérivée

Cours 3 p. 120

Pour chacune des fonctions suivantes déterminer sur quel ensemble elle est dérivable puis déterminer sa dérivée .

a) $f : x \mapsto 9x^4$ définie sur $\mathbb{R}$

b) $h : x \mapsto \frac{3}{4}x - 7$ définie sur $\mathbb{R}$

c) $i : x \mapsto \sqrt{x}(3x - 1)$ définie sur $[0\,;+\infty[$

d) $j : x \mapsto \frac{x^3}{1-x}$ définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$

8 Déterminer sur quel ensemble est dérivable chacune des fonctions suivantes, puis déterminer sa dérivée.

a) $f : x \mapsto 5x^2 - 3x + 2$ définie sur $\mathbb{R}$

b) $g : x \mapsto 100 + \frac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$

c) $h : x \mapsto x\sqrt{x}$ définie sur $[0\,;+\infty[$

d) $j : x \mapsto \frac{12 - 5x}{9x + 2}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{2}{9}\right\}$

9 Déterminer sur quel ensemble est dérivable chacune des fonctions suivantes, puis déterminer sa dérivée.

a) $f : x \mapsto -1{,}2x^4 + 7x^3 - x$ définie sur $\mathbb{R}$

b) $g : x \mapsto \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$

c) $h : x \mapsto x^3(11 - 6x)$ définie sur $\mathbb{R}$

d) $j : x \mapsto \frac{25}{-10x + 9}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{9}{10}\right\}$

9 Déterminer sur quel ensemble est dérivable chacune des fonctions suivantes, puis déterminer sa dérivée.

a) $f : x \mapsto -1{,}2x^4 + 7x^3 - x$ définie sur $\mathbb{R}$

b) $g : x \mapsto \frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{9}x^3 - \frac{11}{2}$ définie sur $\mathbb{R}$

c) $h : x \mapsto x^3(11 - 6x)$ définie sur $\mathbb{R}$

d) $j : x \mapsto \frac{25}{-10x + 9}$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{9}{10}\right\}$

10 Pour chacune des fonctions suivantes, indiquer sa forme générale (somme $u + v$, produit uv, inverse $\frac{1}{v}$, quotient $\frac{u}{v}$), puis en déduire sur quel ensemble elle est dérivable et sa fonction dérivée f'.

$f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x^4}$

$g : x \mapsto \frac{1}{x}(9 - 6x)$

$h : x \mapsto \frac{2}{1 - x}$

$i : x \mapsto \frac{x^2 - 1}{4x + 7}$

4. Composition de fonctions et dérivation

Définition - Composition de fonctions

Soit f une fonction définie sur un intervalle J et g une fonction définie sur un intervalle I tel que, pour tout réel x de I, $g(x)$ appartient à J.

La fonction composée de g suivie de f est la fonction h définie sur I par $h(x) = f(g(x))$.

$$x \xmapsto{g} g(x) = X \xmapsto{f} f(X)$$

$$x \xrightarrow[h]{\qquad\qquad} f\big(g(x)\big)$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $J = [0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$ et g la fonction définie sur $I = \left[\frac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$ par $g(x) = 2x - 5$.

Alors la fonction h, composée de f suivie de g, est définie sur I car

$$x \in I \iff x \geq \frac{5}{2} \iff 2x \geq 5 \iff 2x - 5 \geq 0 \iff g(x) \geq 0 \iff g(x) \in J$$

Et on a, pour tout réel x de I, $h(x) = f\big(g(x)\big) = f(2x-5) = \sqrt{2x-5}$.

Théorème - Dérivée d'une fonction composée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle J et g une fonction affine définie sur un intervalle I par $g(x) = ax + b$ où a et b sont des réels tels que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à l'intervalle J.

Alors la fonction h composée de g suivie de f est dérivable sur I, et on a pour tout réel x de I,

$$h'(x) = a \times f'(ax + b)$$

Exemple

Étudions la dérivabilité de la fonction h de l'exemple précédent.

h est définie sur $\left[\frac{5}{2} ; +\infty\right[$ par $h(x) = \sqrt{2x-5}$.

Or $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ est la fonction racine carrée dérivable sur $]0 ; +\infty[$et, pour tout réel x de $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$, on a $2x - 5 > 0$, donc c'est-à-dire $g(x) > 0$, donc $g(x) \in]0 ; +\infty[$

Ainsi la fonction h composée de g suivie de f est dérivable sur $\left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$.

D'autre part, pour tout réel x de $]0 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; ainsi on a, pour tout réel $x \in \left]\frac{5}{2} ; +\infty\right[$,

$$h'(x) = 2 \times f'(2x-5) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-5}} = \frac{1}{\sqrt{2x-5}}$$

Exercice résolu n°5 p.127

Exercice résolu n°5 p.127

5 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction composée $x \mapsto f(ax + b)$

↳ Cours 4 p. 123

Soit $k : x \mapsto (5x + 8)^3$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de k, puis déterminer sa fonction dérivée.

5 Déterminer la fonction dérivée d'une fonction composée $x \mapsto f(ax+b)$

Cours 4 p. 123

Soit $k : x \mapsto (5x+8)^3$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Déterminer l'ensemble de dérivabilité de k, puis déterminer sa fonction dérivée.

Solution

$5x + 8$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 5$ et $b = 8$. En posant $X = 5x + 8$ on obtient $(5x + 8)^3 = X^3$; donc la fonction k est de la forme $f(ax + b)$ avec $f : X \mapsto X^3$. 1 2

Or f est la fonction cube dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel X, $f'(X) = 3X^2$.

Ainsi la fonction k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout réel x :

$k'(x) = a \times f'(ax + b) = 5 \times f'(5x + 8) = 5 \times 3(5x + 8)^2 = 15(5x + 8)^2$.

Conseils & Méthodes

1 Attention de ne pas confondre la **composition** des fonctions affine et cube $(5x+8)^3$ avec le **produit** des fonctions affine et cube $(5x+8)x^3$

2 Repérer d'abord la fonction affine $ax + b$, puis, en posant $X = ax + b$, identifier la fonction $f : X \mapsto f(X)$.

11 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto (-9x + 1)^5$.

Déterminer sur quel ensemble elle est dérivable puis déterminer sa dérivée.

12 Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h : x \mapsto \sqrt{3x - 1}$

Déterminer sur quel ensemble elle est dérivable puis déterminer sa dérivée.