Évaluation n°1 - 1 août 2020 (1h35)

Exercice 1 (2 points)

Niveau 1

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, telle que $u_4 = 3$ et $u_6 = 48$
Déterminer la valeur de q.

On a $u_6 = u_4 \times q^{6-4} \Leftrightarrow 48 = 3 \times q^2 \Leftrightarrow q^2 = 16 \Leftrightarrow q = 4$ car $q > 0$

2. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_4 = 3$ et $u_7 = 18$.
Déterminer la valeur de r.

On a $u_7 = u_4 + (7-4) \times r \Leftrightarrow 18 = 3 + 3r \Leftrightarrow 3r = 15 \Leftrightarrow r = 5$

Exercice 2 (2 points)

Niveau 1

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (2(n+1)^2 - 3) - (2n^2 - 3) = 2(n^2 + 2n + 1) - 3 - 2n^2 + 3 = 4n + 2$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4n + 2 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ce qui prouve que la suite est strictement croissante.

Exercice 3 (2 points)

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3^n}{4^{n-1}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{4^{n+1-1}} - \frac{3^n}{4^{n-1}} = \frac{3^{n+1}}{4^n} - \frac{3^n \times 4}{4^{n-1} \times 4} = \frac{3^{n+1} - 4 \times 3^n}{4^n} = \frac{3^n(3-4)}{4^n} = -\frac{3^n}{4^n} < 0$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$ dons la suite u est strictement décroissante.

Exercice 4 (4 points)

Niveau 1-2

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{7}{4}$$

2. La suite est-elle arithmétique, géométrique ? Justifier.

- La suite **n'est pas arithmétique** car $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. En effet :

$$u_1 - u_0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad et \quad u_2 - u_1 = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$

- La suite **n'est pas géométrique** car $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. En effet :

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \quad et \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

3. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

Soit P_n la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$ »

Initialisation :
Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $1 \leq 2$ donc la propriété est vérifiée : P_0 est vraie.

Hérédité
On suppose que pour $1 \leq k \leq n$, P_k est vraie c'est-à-dire que $u_k \leq 2$.
Peut on prouver dans ce cas que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq 2$?

On a $u_k \leq 2 \iff \frac{1}{2}u_k + 1 \leq \frac{1}{2} \times 2 + 1 \iff u_{k+1} \leq 2$
On a montré que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $P_k \Rightarrow P_{k+1}$

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2$.

Exercice 5 (4 points)

Niveau 2

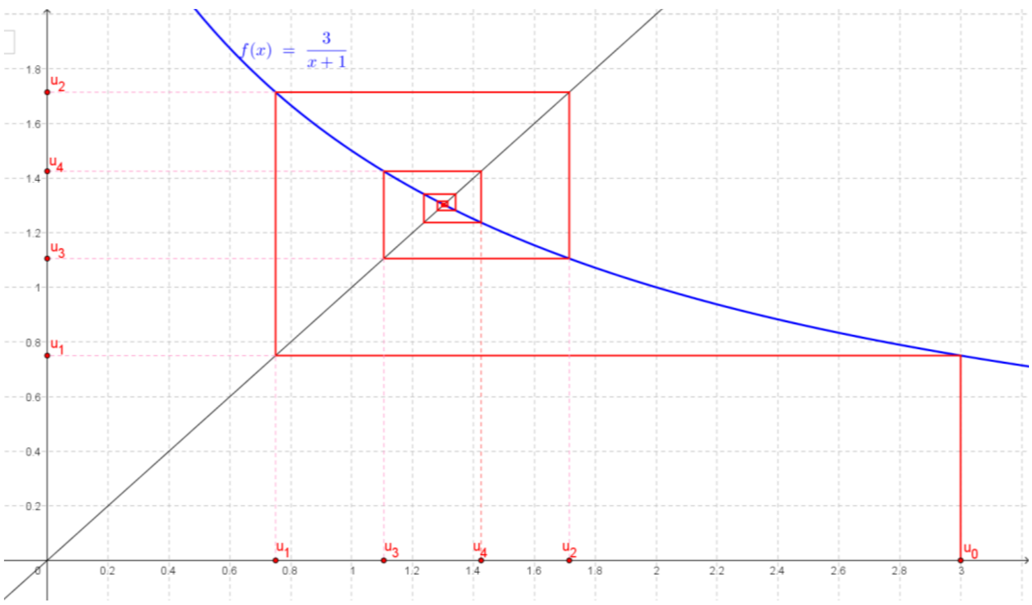
Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{u_n+1} \end{cases}$ et f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \frac{3}{x+1}$.
On admet que la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

1. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff \frac{3}{x+1} = x \\ &\iff 3 = x^2 + x \\ &\iff x^2 + x - 3 = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation du second degré : $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-3) = 13 > 0$ donc l'équation du second degré admet deux solutions x_1 et x_2 distinctes : $x_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ et $x_1 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2}$.
Cependant $D_f = [0\,;\,+\infty[$ donc l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution : $x = \frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

2. Construire sur le graphique suivant les 5 premiers termes de la suite u_n en laissant apparaître les traits de construction.



3. Démontrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, $\frac{3}{4} \leq u_n \leq 3$.

Soit P_n la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{4} \leq u_n \leq 3$ »

- Initialisation :

Pour $n = 0$: $u_0 = 3$ et $\frac{3}{4} \leq 3 \leq 3$ donc la propriété est vérifiée : P_0 est vraie.

- Hérédité

On suppose que pour $1 \leq k \leq n$, P_k est vraie c'est-à-dire que $\frac{3}{4} \leq u_k \leq 3$.

Peut on prouver dans ce cas que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $\frac{3}{4} \leq u_{k+1} \leq 3$?

On a $\frac{3}{4} \leq u_k \leq 3$ et on sait que la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$ donc en particulier sur $\left[\frac{3}{4}\,;3\right]$.

Par conséquent, comme $\frac{3}{4} \leq u_k \leq 3$ on a $f\left(\frac{3}{4}\right) \geq f(u_k) \geq f(3)$.

$$f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{12}{7} \leq 3 \quad ; \quad f(u_k) = u_{k+1} \quad ; \quad f(3) = \frac{3}{4}$$

On donc bien $\frac{3}{4} \leq u_{k+1} \leq 3$.

On a montré que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $P_k \Rightarrow P_{k+1}$

- Conclusion : pour tout entier naturel n , $\frac{3}{4} \leq u_n \leq 3$.

4. Quelle conjecture pouvez-vous faire concernant le comportement de la suite u pour des grandes valeurs de n.

D'après le graphique, il semblerait que les termes de la suite se rapproche rapidement de la valeur prise par l'abscisse du point d'intersection des deux courbes soit environ 1,3.

D'après la question 1) on peut penser à $\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$.

Exercice 6 (4 points)

Niveau 2

Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit S_n la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ »

- Initialisation :

Pour $n =$ 0: $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = 0$ et $\frac{0\times(0+1)}{2} = 0$ donc la S_0 est vraie.

- Hérédité

On suppose que pour $1 \leq k \leq n$, on a $1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Peut on prouver que $1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$?

On a

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (k+1) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

Or $\dfrac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\dfrac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.

On a montré que la propriété est héréditaire : $S_k \Rightarrow S_{k+1}$.

- Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 7 (2 points + 2points bonus)

Niveau 3

On considère la suite u définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout entier $n\geq 1$:

$$u_{n+1}=4u_n-3u_{n-1}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n=\frac{3^n-1}{2}$.

Soit P_n la propriété : « pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\frac{3^n-1}{2}$ »

- Initialisation :

Pour $n=0$: $u_0=0$ et $\frac{3^0-1}{2}=0$ donc la propriété est vérifiée : P_0 est vraie.

- Hérédité

On suppose que pour $1\leq k\leq n$, P_k est vraie c'est-à-dire que $u_k=\frac{3^k-1}{2}$.

Peut on prouver dans ce cas que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1}=\frac{3^{k+1}-1}{2}$?

On sait que $u_{k+1}=4u_k-3u_{k-1}$ donc

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 4\times\frac{3^k-1}{2}-3\,\frac{3^{k-1}-1}{2} \\ &= \frac{4\times 3^k-4-3\times 3^{k-1}+3}{2} \\ &= \frac{4\times 3^k-3^k-1}{2}=\frac{3\times 3^k-1}{2}=\frac{3^{k+1}-1}{2} \end{aligned}$$

On donc bien $u_{k+1}=\frac{3^{k+1}-1}{2}$.

On a montré que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $P_k\Rightarrow P_{k+1}$

- Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n=\frac{3^n-1}{2}$.