Exercice n°1

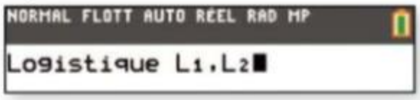
Depuis l'année 2003, on étudie le taux d'équipement des 12 ans et plus en ordinateurs et Internet à domicile. La part des 12 ans et plus ayant Internet à la maison est modélisée par la fonction f telle que $f(t) = \dfrac{92}{1 + e^{1{,}6-0{,}28\,t}}$, taux exprimé en %

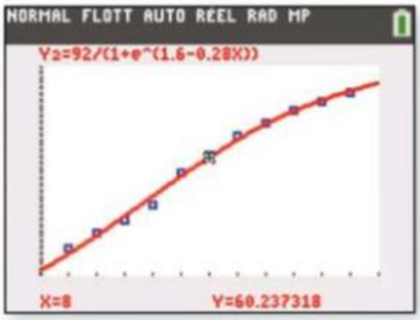
où t est le temps écoulé depuis 2000, exprimé en années, pour $t \in [\,0\,;30\,]$.

Cette modélisation est obtenue à la calculatrice en choisissant l'ajustement logistique.

Ci-dessous le nuage de points et la courbe de la fonction f.

Ainsi en 2008, le taux d'équipement en Internet des 12 ans et plus est de 60 %.



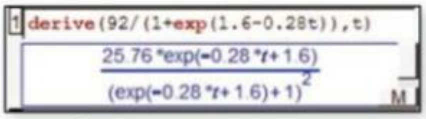


1. a) Calculer $f(13)$ et interpréter le résultat.

b) Faire une interpolation pour l'année 2017.

2. On a obtenu la dérivée de la fonction f à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$$f'(t) = \frac{25{,}76 \times e^{1{,}6-0{,}28\,t}}{\left(1 + e^{1{,}6-0{,}28\,t}\right)^2}.$$



a) Justifier que la dérivée est positive sur $[\,0\,;30\,]$.
En déduire le tableau de variation de la fonction f.

b) Indiquer le nombre de solutions de l'équation $f(t) = 90$.
Résoudre cette équation par balayage et en donner une valeur approchée à 0,1 près.

3. Peut-on prévoir que 92 % des 12 ans et plus seront équipés d'Internet à domicile ?

Exercice n°2

La **fonction d'offre** de mangues, en centaines de kg, sur un marché de gros est modélisée par la fonction f telle que :

$$f(x) = 5 + e^{0{,}5x-2}$$

pour un prix x variant de 3 à 10 € le kg.

1. Calculer $f'(x)$, où f' est la dérivée de f.

2. a) Calculer la quantité offerte pour un prix de 5 € le kg. Puis pour un prix de 5,01 €.

b) Calculer le quotient $\dfrac{f(5{,}01) - f(5)}{0{,}01}$ en conservant tous les chiffres donnés par la calculatrice.
Comparer ce quotient à $f'(5)$.
Utiliser au mieux la calculatrice.

3. Résoudre l'équation $f(x) = 8$. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice n°3

Une entreprise fabrique des cartes à puce électroniques à l'aide d'une machine.
Le coût d'utilisation de la machine, en fonction de la quantité x de cartes produites, est modélisé par :
$f(x) = x + 5 + e^{0{,}5x-1}$, où x est **en milliers de cartes** et $f(x)$ est exprimée **en centaines d'euros**.
Chaque carte fabriquée est vendue 0,5 €.

1. Calculer $f'(x)$. En déduire le coût marginal de fabrication de 2 000 cartes.

2. a) Justifier que la recette, en centaines d'euros, est donnée par $R(x) = 5x$ pour la vente de x cartes, en milliers de cartes.

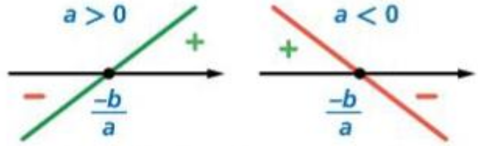
b) Résoudre l'équation $f'(x) = R'(x)$.
On note x_0 la solution de cette équation.
Arrondir le résultat à 0,01 et l'interpréter.

3. a) Déterminer l'expression du bénéfice $B(x)$.

b) Visualiser la courbe de la fonction bénéfice sur l'écran de la calculatrice et déterminer graphiquement la quantité de cartes qui permet un bénéfice maximal.

Exercice n°4

On rappelle le signe d'une fonction affine :



Indiquer le signe des fonctions suivantes :

a) $f(x) = 3x + 1$
b) $f(x) = -2x + 8$
c) $f(x) = 1 - 0{,}5x$
d) $R(q) = 0{,}01\,q - 5$
e) $B(q) = 4 - 1{,}6\,q$
f) $M(t) = 1{,}02\,t + 25{,}5$
g) $f(t) = 4{,}8 - 0{,}08\,t$
h) $B(q) = -0{,}03\,q + 12$

Exercice n°5

Compléter rapidement les phrases suivantes par **positif** ou **négatif**, ou « On ne sait pas ».

1. a) Un carré est toujours …
b) $5 + (x+1)^2$ est toujours …
c) $-(x+3)^2 - 2$ est toujours …
2. a) $\ln(x+3)$, avec $x > -3$, est toujours …
b) $2 + \ln(x)$, avec $x > 0$, est toujours …
c) $2x + \ln(x+1)$, avec $x > 0$ est toujours …
3. a) $-\mathrm{e}^{-0{,}4x+3}$ est toujours …
b) $4 + \mathrm{e}^{1-0{,}01x}$ est toujours …
c) $\mathrm{e}^{-x-1} - 3$ est toujours …

Exercice n°6

Étudier le signe des expressions suivantes :

a) $f(x) = 0{,}5\,x^2 - x - 40$
b) $f(x) = x^2 + 4x + 9$
c) $B(q) = -5\,q^2 + 22q - 24$
d) $C(q) = 0{,}4\,q^2 - 2q + 8$
e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{\left(x^2+9\right)^2}$
f) $g(x) = \dfrac{2x^2 - 5x + 3}{(x+1)^2}$

Exercice n°7

La fonction de **coût total** de fabrication de q tonnes de crème solaire est donnée en k€ par :

$$C(q) = q^2 + 5q + 36{,}8 \quad \text{pour } q \in [\,0\,;\,20\,].$$

Chaque tonne est vendue 25,4 k€, soit 25,4 € le kg.

1. a) Calculer la dérivée $C'(q)$. En déduire le coût marginal de fabrication de 1 kg de crème, après une production totale de 10 tonnes.

b) Justifier que le coût total est croissant.

2. a) Exprimer la **recette** $R(q)$, en k€, en fonction de la quantité q produite et vendue, en tonnes.

b) Visualiser les fonctions coût total et recette sur le même graphique. Avec la précision permise par le graphique, indiquer la plage de bénéfice.

c) Si le prix de vente au kg était de 15 €, peut-on espérer un profit ? Justifier.

3. a) Justifier que le **bénéfice** engendré par la vente de q tonnes, au prix unitaire de 25,4 € par kg, est donné par $B(q) = -q^2 + 20{,}4\,q - 36{,}8$.

b) Résoudre l'équation $B(q) = 0$.

En déduire la plage de bénéfice.

Exercice n°8

On admet que le revenu fiscal d'un pays est fonction du taux total d'imposition t dans ce pays.

Un ajustement statistique donne la fonction f telle que $f(t) = 0{,}000344\,(100\,t^2 - t^3)$,

où t est le taux d'imposition en % et $f(t)$ le revenu fiscal total, en pourcentage du PIB du pays.

1. a) Calculer la dérivée de la fonction g telle que :

$$g(x) = 100\,x^2 - x^3 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Étudier le signe de $g'(x)$.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[\,0\,;\,100\,]$.

c) Montrer que la fonction f admet un maximum.

d) À l'écran de la calculatrice, visualiser la courbe de cette fonction, dite **courbe de Laffer**.

2. a) En France, en 2013, le taux total d'imposition est de 51,4 % et le revenu fiscal représente 44,2 % du PIB. Le revenu fiscal en France est-il conforme au modèle proposé ?

b) Si le taux total d'imposition augmente de 3 points de pourcentage, quelle est l'évolution du revenu fiscal ?

c) À partir de la courbe de Laffer, commenter la phrase : « *Trop d'impôt tue l'impôt* ».