PARTIE
1
Nombres complexes

Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557)

Jérôme Cardan (1501-1576)

À la Renaissance, une querelle oppose Tartaglia et Cardan concernant la résolution générale des équations du 3e degré, publiée par Cardan dans son *Ars Magna* (1545).

↳ Dicomaths p. 237 et 241

Raphaël Bombelli (1526-1572)

En 1572, Bombelli dans son *Algebra* donne une méthode pour résoudre les équations algébriques de degrés 3 et 4 en introduisant la notation $\sqrt{-3}$.

↳ Dicomaths p. 237

Leonhard Euler (1707-1783)

En 1748, Euler énonce la formule de Moivre, les formules d'Euler et l'identité d'Euler. Il introduit le symbole i.

↳ Dicomaths p. 238

Mon parcours au lycée

Dans les classes précédentes…

- J'ai étudié certains ensembles de nombres et leurs propriétés : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.
- J'ai résolu des équations du 2nd degré dans l'ensemble des réels $\mathbb{R}$.

En Terminale…

Je vais découvrir de nouveaux nombres (ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$), étudier leurs propriétés algébriques et leurs applications géométriques.

Carl Friedrich Gauss (1707-1783)

Jean-Robert Argand (1768-1822)

Félix Klein (1849-1925)

Benoît Mandelbrot (1924-2010)

En 1799, Gauss soutient sa thèse de doctorat : « Tout polynôme non constant, à coefficients complexes, admet au moins une racine complexe ». Par la suite, il s'intéressera aux polygônes réguliers.

↪ Dicomaths p. 239

En 1806, Argand publie son *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* et introduit la forme algébrique.

↪ Dicomaths p. 237

En 1872, Klein énonce une manière d'étudier la géométrie à travers des similitudes directes du plan complexe.

↪ Dicomaths p. 239

Au XX^{e} siècle, les nombres complexes sont très présents en physique (phénomènes ondulatoires), en économie (phénomènes cycliques, fractales de Mandelbrot) ou encore en art .

↪ Dicomaths p. 239

Domaines professionnels

- Un·e **ingénieur·e** en physique utilise les nombres complexes pour représenter un phénomène ondulatoire : mécanique (oscillations), électrique (impédances, filtres passe-haut etc.) ou optique. De manière générale ces calculs servent pour la modulation et la démodulation dans les télécommunications.
- Un·e **acousticien·ne** étudie les phénomènes acoustiques d'une salle en utilisant des calculs avec des nombres complexes.
- Un·e **ingénieur·e** dans le domaine de l'audioprothèse fait de même en optimisant les prothèses auditives.
- Un·e **économiste** peut modéliser un cycle de croissance ou un cycle de prix grâce aux nombres complexes.

1

Nombres complexes : point de vue algébrique et polynômes

VIDÉO

Histoire des nombres complexes
lienmini.fr/maths-e01-01

Les premiers nombres, utilisés pour compter, étaient les entiers naturels. Ces nombres ne permettent pas de résoudre toutes les équations. Jusqu'en classe de Première, le plus grand ensemble de nombres étudié est l'ensemble des réels. Au XVI^{e} siècle, un nouvel ensemble de nombres, qui n'est pas inclus dans $\mathbb{R}$, est créé : l'ensemble des nombres complexes.
Aujourd'hui, les nombres complexes sont largement utilisés, notamment par les physiciens pour étudier des phénomènes accoustiques.

Peut-on trouver deux nombres tels que leur somme soit égale à 10 et leur produit soit égal à 40 ?

➥ **Activité 2** p. 12

Pour prendre un bon départ

EXO
Prérequis
lienmini.fr/maths-e01-02

Les rendez-vous Sésamath

1 Réduire une expression

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $A = (2 + 3x) + (1 - x)$

b) $B = (2 + 3x) - (1 - x)$

2 Utiliser la distributivité

Développer et réduire les expressions suivantes.

a) $A = 2 \times (1 - 2x)$

b) $B = (4 + 2x) \times (3 - 3x)$

3 Calculer avec des racines carrées

1. Écrire les expressions suivantes sans racine carrée au dénominateur.

a) $A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

b) $B = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

2. En multipliant le numérateur et le dénominateur par $1 - \sqrt{2}$ écrire l'expression suivante sans racine carrée au dénominateur : $C = \dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$.

3. En utilisant une méthode similaire à celle de la question **2.**, écrire l'expression suivante sans racine carrée au dénominateur : $D = \dfrac{1}{1-\sqrt{3}}$.

4 Calculer un discriminant

Calculer le discriminant de chaque trinôme ci-dessous.

a) $2x^2 + 3x + 5$

b) $4x^2 - 20x + 25$

c) $2x^2 - 4x - 2$

d) $-2x^2 - 4x - 2$

5 Déterminer la forme canonique d'un trinôme

Déterminer la forme canonique des fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^2 - 6x + 5$

b) $g(x) = 3x^2 + 9x + 18$

6 Résoudre une équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

a) $3x^2 - 9x - 12 = 0$

b) $2x^2 + 5x + 7 = 0$

c) $2x^2 - 2x + \dfrac{1}{2} = 0$

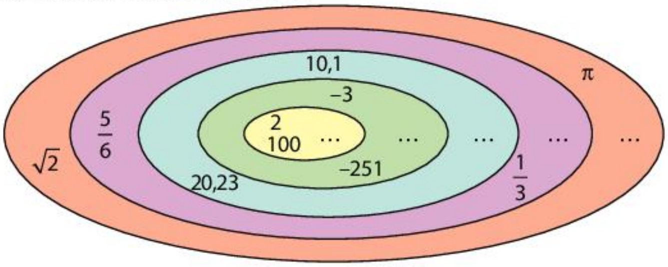
d) $-x^2 - x + 2 = 0$

Activités

10 min

1 Faire le point sur les ensembles de nombres

1. Recopier et compléter le schéma ci-dessous, en déterminant l'ensemble de nombres correspondant (par exemple on notera $\mathbb{R}$ pour l'ensemble des réels).



2. On considère l'équation suivante : $x + 3 = 2$.
a) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers naturels.
b) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers relatifs.

3. On considère l'équation suivante : $2x + 1 = 0$.
a) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers naturels.
b) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des entiers relatifs.
c) Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des réels.

4. On considère l'équation $x^2 + 1 = 0$.
Déterminer les solutions de cette équation dans l'ensemble des réels.

↪ Cours 1 p. 14

Histoire des maths — 20 min

2 Découvrir une approche historique

On veut trouver deux nombres tels que leur somme soit égale à 10 et leur produit soit égal à 40.


Cardan

Au milieu du XVI^e siècle, Cardan donne des solutions de l'équation correspondant à ce problème : $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$.
Il nomme ces quantités « quantités sophistiquées ».
Plus tard, au XVII^e siècle, Descartes les nommera « quantités imaginaires ».
Au XVIII^e siècle, Euler introduit une nouvelle notation : il pose i le nombre tel que $i^2 = -1$.

1. Montrer que le problème peut se traduire par l'équation $x \times (10 - x) = 40$.

2. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

3. En admettant que les quantités $5 + \sqrt{-15}$ et $5 - \sqrt{-15}$ de Cardan existent, montrer qu'elles vérifient bien l'équation. Pour cette question, on généralise la règle suivante à tous les nombres réels : $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$.

4. On pose i le nombre tel que $i^2 = -1$.
a) En déduire que i est solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$.
b) Déterminer la valeur de i^4.

5. En utilisant le nombre i, déterminer un nombre qui :
a) élevé au carré est égal à −4. **b)** élevé au carré est égal à −2. **c)** élevé au carré est égal à −15.

6. En utilisant le résultat de la question **5. c)**, réécrire les solutions proposées par Cardan en utilisant le nombre i.

↪ Cours 1 p. 14

25 min

3 Calculer avec des nombres complexes

A ▶ Addition et multiplication

1. Développer et simplifier les expressions suivantes : $A = (3 - 2x) + (-2 + x)$ et $B = (3 - 2x) \times (-2 + x)$.

2. En utilisant $i^2 = -1$, développer et écrire les expressions suivantes sous la forme $a + ib$ avec a et b deux réels.
$C = (3 - 2i) + (-2 + i)$ et $D = (3 - 2i) \times (-2 + i)$.

3. Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des réels.
Ces écritures sont la **forme algébrique** des nombres complexes z et z'.
Développer et écrire les expressions suivantes sous la forme $A + iB$ avec A et B deux réels.
$E = z + z'$; $F = z - z'$ et $G = z \times z'$.

B ▶ Inverse

1. a) Déterminer la forme algébrique de $(2 - i)(2 + i)$.

b) En multipliant le dénominateur et le numérateur par $2 - i$, déterminer la forme algébrique de $H = \dfrac{1}{2+i}$.

2. Soit a et b deux réels.

a) Déterminer la forme algébrique de $(a + ib)(a - ib)$.

b) En multipliant le numérateur et le dénominateur par $a - ib$, déterminer la forme algébrique de $H = \dfrac{1}{a+ib}$.

↪ Cours 2 p. 16

10 min

4 Découvrir le conjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ avec a et b deux réels.
On appelle conjugué de z, le nombre complexe noté $\overline{z}$ défini par $\overline{z} = a - ib$.

1. Déterminer la forme algébrique de $z + \overline{z}$, $z - \overline{z}$ et $z \times \overline{z}$.

2. Déterminer une condition sur z et $\overline{z}$ pour que :

a) z soit un nombre réel.

b) z soit un nombre imaginaire pur.

↪ Cours 3 p. 18

20 min

5 Résoudre des équations du second degré

1. On veut résoudre l'équation suivante : $x^2 + 4 = 0$.

a) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$.

b) Écrire $x^2 + 4$ sous la forme $x^2 - c^2$ avec c un nombre complexe.

c) En utilisant une identité remarquable, factoriser $x^2 + 4$.

d) En reconnaissant un produit nul, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + 4 = 0$.

2. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $x^2 + 2x + 10 = 0$.

a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 10$. Déterminer la forme canonique de f.

b) Écrire $f(x)$ sous la forme $(x + c)^2 - d^2$ avec c et d deux nombres complexes.

c) En utilisant une identité remarquable, factoriser $f(x)$, puis résoudre $f(x) = 0$ dans $\mathbb{C}$.

↪ Cours 4 p. 20

1 Ensemble des nombres complexes

Théorème Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, appelé ensemble des nombres complexes ayant les propriétés suivantes.
- **$\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.**
- **Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$.**
- **$\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui ont les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.**

Exemples

Les nombres 3 ; 5 et i appartiennent à $\mathbb{C}$. Les nombres $3 + i$ et $5i$ appartiennent à $\mathbb{C}$.

Propriété Écriture algébrique

Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $a + ib$ avec a et b deux réels.
Cette écriture s'appelle la forme algébrique de z.
- **a est la partie réelle de z. On note $a = \text{Re}(z)$.**
- **b est la partie imaginaire de z. On note $b = \text{Im}(z)$.**

Remarque

Si $a = 0$ (soit $\text{Re}(z) = 0$), on a $z = ib$. On dit que z est imaginaire pur.
L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$.

Si $b = 0$ (soit $\text{Im}(z) = 0$), on a $z = a$. Alors z est réel.

Exemples

① Soit z le nombre complexe tel que $z = 4 - 2i$. Alors $\text{Re}(z) = 4$ et $\text{Im}(z) = -2$.

② Soit z' le nombre complexe tel que $z' = 3i$. Alors $\text{Re}(z') = 0$ et $\text{Im}(z') = 3$. z' est imaginaire pur.

Théorème Égalité dans $\mathbb{C}$

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des réels. Alors

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

Remarque Ce théorème assure l'unicité de l'écriture d'un nombre complexe sous forme algébrique.

Démonstration

Si $a = a'$ et $b = b'$ alors $z = a + ib = a' + ib' = z'$.

Réciproquement, si $z = z'$, alors $a + ib = a' + ib'$. Donc $a - a' = i(b' - b)$.

Supposons par l'absurde que $b \neq b'$.

Alors on a $\dfrac{a - a'}{b' - b} = i$.

Or a, a', b, b' sont des réels, donc $\dfrac{a - a'}{b' - b} \in \mathbb{R}$. Donc $i \in \mathbb{R}$. Cela est absurde. Donc $b = b'$.

Par conséquent $a - a' = 0$, soit $a = a'$.

Corollaire Conséquences de l'égalité dans $\mathbb{C}$

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des réels.
- **$z \neq z' \Leftrightarrow a \neq a'$ ou $b \neq b'$**
- **$z = 0 \Leftrightarrow a = 0$ et $b = 0$**
- **$z \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$ ou $b \neq 0$**

Méthode 1 Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe

Énoncé

Pour chaque nombre complexe ci-dessous, déterminer sa forme algébrique, sa partie réelle et sa partie imaginaire.

a) $z = 3i - 4 + 2i - 1$ **b)** $z' = 3i - 5i + 0{,}5i$

Solution

a) $z = -4 - 1 + 3i + 2i = -5 + 5i$ 1 2

Donc $\mathrm{Re}(z) = -5$ et $\mathrm{Im}(z) = 5$. 3

b) $z' = 3i - 5i + 0{,}5i = (3 - 5 + 0{,}5)i = -1{,}5i$

Donc $\mathrm{Re}(z) = 0$ et $\mathrm{Im}(z) = -1{,}5$.

Conseils & Méthodes

1 Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe, c'est l'écrire sous la forme $a + ib$.
a est la partie réelle et b est la partie imaginaire.

2 Si z et z' sont deux nombres complexes, alors $z + z' = z' + z$.

3 Attention, si $z = a + ib$ avec a et b deux réels, alors $\mathrm{Im}(z)$ est égal à b et non ib.

À vous de jouer !

1 Pour chaque nombre complexe ci-dessous, déterminer sa forme algébrique.

a) $z = -4 + i + 2 - i$ **b)** $z = 5 + i \times i - 4$

2 Pour chaque nombre complexe ci-dessous, déterminer sa partie réelle et sa partie imaginaire.

a) $z = 5i - 4 + i$ **b)** $z = 2 - i^2$

Exercices 37 à 41 p. 28

Méthode 2 Utiliser l'égalité de deux nombres complexes

Énoncé

1. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que $(-1 + 2x) + i(1 + y) = 2 + 3i$.

2. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que $(x + y) + i(2x - y + 4) = 0$.

Solution

1. $(-1 + 2x) + i(1 + y) = 2 + 3i \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2x = 2 \\ 1 + y = 3 \end{cases}$ 1

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases}$ 2

Donc $x = \dfrac{3}{2}$ et $y = 2$.

2. $(x + y) + i(2x - y + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - y + 4 = 0 \end{cases}$ 3 $\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 2x - (-x) + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 3x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{4}{3} \\ x = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$

Donc $x = -\dfrac{4}{3}$ et $y = \dfrac{4}{3}$.

Conseils & Méthodes

1 $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$.

Et si on a $z = a + ib$ avec a et b deux réels, alors $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

2 Résoudre ensuite le système de deux équations à deux inconnues.

3 $0 = 0 + 0i$, donc $\mathrm{Re}(0) = 0$ et $\mathrm{Im}(0) = 0$.

À vous de jouer !

3 Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :
$(x + 2) + i(x + y - 1) = 5 - 2i$.

4 Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :
$(2x + y) + i(x + y - 1) = 0$.

Exercices 42 à 44 p. 28

2 Opérations dans $\mathbb{C}$

Propriétés Addition et multiplication

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des nombres réels.

① $z + z' = (a + a') + i(b + b')$ **② $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$**

Démonstration

L'addition et la multiplication suivent les mêmes règles de calculs que dans $\mathbb{R}$.

① $z + z' = (a + ib) + (a' + ib')$
$= a + ib + a' + ib'$
$= a + a' + ib + ib'$
$= (a + a') + i(b + b')$

② $z \times z' = (a + ib) \times (a' + ib')$
$= a \times a' + a \times ib' + ib \times a' + ib \times ib'$
$= aa' + iab' + ia'b + i^2bb'$
$= aa' + iab' + ia'b - bb'$ car $i^2 = -1$
$= (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$

Définition Opposé

Pour tout nombre complexe z, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z + z' = 0$.

z' est appelé opposé de z et on le note $-z$.

Si $z = a + ib$ avec a et b deux nombres réels, alors $-z = (-a) + i(-b)$.

Exemple

Si $z = 2 - 7i$, alors $-z = -2 + 7i$.

Définition Soustraction

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des nombres réels. Alors $z - z'$ est défini par $z + (-z')$ et on a $z - z' = (a - a') + i(b - b')$.

Exemple

Si $z = 2 + 3i$ et $z' = -4 + 2i$, alors $z - z' = (2 - (-4)) + (3 - 2)i = 6 + i$.

Définition Inverse

Pour tout nombre complexe z non nul, il existe un unique nombre complexe z' tel que $z \times z' = 1$.

z' est appelé inverse de z et on le note $\frac{1}{z}$.

Si $z = a + ib$ avec a et b deux nombres réels et $z \neq 0$, alors $\frac{1}{z} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \times \frac{b}{a^2 + b^2}$.

Démonstration

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$, avec a et b deux réels.

Alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{a - ib}{(a + ib) \times (a - ib)} = \frac{a - ib}{a^2 - (ib)^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i \times \frac{b}{a^2 + b^2}$.

Exemple

Si $z = 2 + 3i$, alors $\frac{1}{z} = \frac{1}{2 + 3i} = \frac{2 - 3i}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{2 - 3i}{2^2 - 9i^2} = \frac{2 - 3i}{13} = \frac{2}{13} - \frac{3}{13}i$.

Définition Quotient

Soit z et z' deux nombres complexes tels que $z' \neq 0$. Alors $\frac{z}{z'}$ est défini par $z \times \frac{1}{z'}$.

Méthode 3 Calculer la somme et le produit de deux nombres complexes

Énoncé

On considère les deux nombres complexes : $z_1 = 5 - 2i$ et $z_2 = -2 + 4i$.
Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 + z_2$ **b)** $4z_1$ **c)** $z_1 \times z_2$ **d)** z_1^2

Solution

a) $z_1 + z_2 = 5 - 2i + (-2 + 4i)$
$= 3 + 2i$ 1

b) $4z_1 = 4 \times (5 - 2i)$
$= 20 - 8i$ 2

c) $z_1 \times z_2 = (5 - 2i) \times (-2 + 4i)$
$= -10 + 20i + 4i - 8i^2$
$= -10 + 20i + 4i + 8$ 3
$= -2 + 24i$

d) $z_1^2 = (5 - 2i) \times (5 - 2i)$ 4
$= 25 - 10i - 10i + 4i^2$
$= 25 - 10i - 10i - 4$
$= 21 - 20i$

Conseils & Méthodes

1 La forme algébrique est $a + ib$ avec a et b deux réels.

2 On développe comme dans $\mathbb{R}$.

3 $i^2 = -1$

4 $z^2 = z \times z$

À vous de jouer !

5 Soit $z_1 = -2 + 3i$ et $z_2 = -3 + 2i$. Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 - z_2$ **b)** $-3z_1$ **c)** $2z_1^2$

6 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $(3 - i) \times (4 + 2i)$ **b)** $(5 - i) \times (5 + i)$

↪ Exercices 45 à 53 p. 28

Méthode 4 Calculer l'inverse et le quotient de nombres complexes

Énoncé

1. **Écrire le nombre complexe suivant sous forme algébrique : $z_1 = \dfrac{1}{2i}$.**

2. **Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante : $(5 - i) \times z - i = i$. On donnera la ou les solution(s) sous forme algébrique.**

Solution

1. $\dfrac{1}{z_1} = \dfrac{1}{2i} = \dfrac{-2i}{2i \times (-2i)} = \dfrac{-2i}{-4i^2} = \dfrac{-2i}{4} = -\dfrac{1}{2}i$ 1

2. $(5 - i) \times z - i = i \Leftrightarrow (5 - i) \times z = 2i \Leftrightarrow z = \dfrac{2i}{5 - i}$ 2

$\Leftrightarrow z = \dfrac{2i \times (5 + i)}{(5 - i)(5 + i)}$ 3 $\Leftrightarrow z = \dfrac{10i + 2i^2}{25 - i^2}$ 4

$\Leftrightarrow z = \dfrac{10i - 2}{25 + 1} \Leftrightarrow z = \dfrac{-2 + 10i}{26} \Leftrightarrow z = -\dfrac{1}{13} + \dfrac{5}{13}i.$

Donc $S = \left\{-\dfrac{1}{13} + \dfrac{5}{13}i\right\}$.

Conseils & Méthodes

1 Si $z = a + ib$, pour écrire l'inverse de z sous forme algébrique, il faut multiplier le numérateur et le dénominateur par $a - ib$.

2 Pour résoudre l'équation, chercher à isoler l'inconnue (z).

3 Le dénominateur est $5 - i$. Pour écrire le nombre complexe sous forme algébrique, multiplier le numérateur et le dénominateur par $5 + i$.

4 $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

À vous de jouer !

7 Écrire sous forme algébrique les nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \dfrac{1}{3 + i}$ **b)** $z_2 = \dfrac{1}{i}$

8 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera la solution sous forme algébrique.

a) $(1 - i)z = 1 + i$ **b)** $(5 + 3i)z - 2 = i$

↪ Exercices 54 à 61 p. 29

3 Conjugué d'un nombre complexe

Définition Conjugué d'un nombre complexe

Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$, avec a et b deux nombres réels.
Alors le conjugué de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe défini par $\overline{z} = a - ib$.

Exemple Le conjugué de $z = 3 + 1{,}5i$ est $\overline{z} = 3 - 1{,}5i$.

Propriétés Propriétés du conjugué

Pour tout nombre complexe z, on a :

① $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
② $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
③ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
④ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
⑤ $\overline{\overline{z}} = z$

Démonstration

Soit $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

① $z + \overline{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$
② $z - \overline{z} = a + ib - (a - ib) = a + ib - a + ib = 2ib = 2i\,\mathrm{Im}(z)$
③ $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow 2i\mathrm{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z - \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = \overline{z}$
④ $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow 2\mathrm{Re}(z) = 0 \Leftrightarrow z + \overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
⑤ $\overline{z} = a - ib$. Donc $\overline{\overline{z}} = a + ib = z$

Propriétés Opérations avec les conjugués

Pour tous nombres complexes z et z', on a :

① $\overline{-z} = -\overline{z}$
② $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
③ $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
④ pour tout entier naturel n, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
⑤ Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
⑥ Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e01-04

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des réels.

② D'une part, $z + z' = a + a' + i(b + b')$, donc $\overline{z + z'} = a + a' - i(b + b')$.
D'autre part, $\overline{z} + \overline{z'} = a - ib + a' - ib' = a + a' - i(b + b')$.
Donc $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.

③ D'une part, $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$, donc $\overline{z \times z'} = (aa' - bb') - i(ab' + a'b)$.
D'autre part, $\overline{z} \times \overline{z'} = (a - ib)(a' - ib') = aa' - iab' - ia'b + i^2bb' = aa' - bb' - i(ab' + a'b)$.
Donc $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

④ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ ».
Initialisation : pour $n = 0$, $\overline{z^0} = \overline{1} = 1$ et $(\overline{z})^0 = 1$. Donc $\overline{z^0} = (\overline{z})^0$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.
Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire $\overline{z^{n+1}} = (\overline{z})^{n+1}$.
$\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n \times z} = \overline{z^n} \times \overline{z} = (\overline{z})^n \times \overline{z} = (\overline{z})^{n+1}$. Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

⑤ Si $z \neq 0$, $z \times \frac{1}{z} = 1$, donc $\overline{z \times \frac{1}{z}} = \overline{1}$. Donc $\overline{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = 1$, soit $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$.

⑥ Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \overline{\left(z' \times \frac{1}{z}\right)} = \overline{z'} \times \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{z'} \times \frac{1}{\overline{z}} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$.

Exercices résolus

Méthode 5 Déterminer et utiliser le conjugué d'un nombre complexe

Énoncé

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $Z_1 = z - \overline{z}$.

a) Déterminer le conjugué de Z_1 en fonction de z et $\overline{z}$.

b) Z_1 est-il un nombre réel, imaginaire pur ou aucun des deux ?

2. Reprendre les questions précédentes avec $Z_2 = z \times \overline{z}$.

Solution

1. a) $\overline{Z_1} = \overline{z - \overline{z}} = \overline{z} - \overline{\overline{z}}$ **1** $= \overline{z} - z$ **2**

b) $\overline{Z_1} = -(z - \overline{z}) = -Z_1$ **3** Donc Z_1 est un nombre imaginaire pur.

2. a) $\overline{Z_2} = \overline{z \times \overline{z}} = \overline{z} \times \overline{\overline{z}}$ **4** $= \overline{z} \times z$

b) $\overline{Z_2} = \overline{z} \times z = z \times \overline{z} = Z_2$. Donc Z_2 est un nombre réel.

Conseils & Méthodes

1 $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$ et $\overline{-z} = -\overline{z}$

Donc $\overline{z - z'} = \overline{z + (-z')} = \overline{z} - \overline{z'}$.

2 $\overline{\overline{z}} = z$

3 Soit z un nombre complexe.
Pour montrer que z est un nombre réel, on peut montrer que $z = \overline{z}$.
Pour montrer que z est un nombre imaginaire pur on peut montrer que $z = -\overline{z}$ ou $\overline{z} = -z$.

4 $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$

À vous de jouer !

9 Montrer que pour tout nombre complexe z non nul, $\frac{1}{z} - \frac{1}{\overline{z}}$ est un nombre imaginaire pur.

10 Montrer que pour tout nombre complexe z non nul, $\frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}}$ est un nombre réel.

➜ Exercices 62 à 69 p. 29

Méthode 6 Résoudre une équation faisant intervenir z et $\overline{z}$

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $-\overline{z} = 5 - \mathrm{i}$ **b)** $2z + \overline{z} = 3 - 2\mathrm{i}$

Solution

a) $-\overline{z} = 5 - \mathrm{i} \Leftrightarrow \overline{z} = -5 + \mathrm{i}$ **1** $\Leftrightarrow \overline{\overline{z}} = \overline{-5 + \mathrm{i}}$ **2** $\Leftrightarrow z = -5 - \mathrm{i}$

Donc $S = \{-5 - \mathrm{i}\}$.

b) $2z + \overline{z} = 3 - 2\mathrm{i}$ **3**

Posons $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels.

$2z + \overline{z} = 3 - 2\mathrm{i} \Leftrightarrow 2(a + \mathrm{i}b) + (a - \mathrm{i}b) = 3 - 2\mathrm{i}$ **4**

$\Leftrightarrow 2a + 2\mathrm{i}b + a - \mathrm{i}b = 3 - 2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow 3a + \mathrm{i}b = 3 - 2\mathrm{i}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 3 \\ b = -2 \end{cases}$ **5** $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$

Donc $S = \{1 - 2\mathrm{i}\}$.

Conseils & Méthodes

1 Isoler l'inconnue.

2 Pour obtenir z dans le membre de gauche de l'égalité, on prend le conjugué de chaque membre. En effet, $\overline{\overline{z}} = z$.

3 Dans cette équation, on retrouve z et $\overline{z}$. On ne peut donc pas utiliser la même méthode que la question **a)** et isoler l'inconnue.

4 Si $z = a + \mathrm{i}b$, alors $\overline{z} = a - \mathrm{i}b$.

5 $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$.

À vous de jouer !

11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $2\overline{z} = 4 + \mathrm{i}$ **b)** $-3\overline{z} = -2 - \mathrm{i}$

12 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $z - 3\overline{z} = 6 - 2\mathrm{i}$ **b)** $-z + 4\overline{z} = 5 - 7\mathrm{i}$

➜ Exercices 70 à 73 p. 29

4 Formule du binôme et équations du second degré

Propriété **Formule du binôme de Newton**

Soit a et b deux nombres complexes. Pour tout entier naturel n, on a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e01-05

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ ».

Initialisation : pour $n=0$, $(a+b)^0 = 1$ et $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$. Donc la propriété est vraie pour $n=0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Montrons que $P(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire $(a+b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$.

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)^n \times (a+b) = \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) \times (a+b) = a \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= \binom{n}{n} a^{n+1} b^{n-n} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \binom{n}{0} a^0 b^{n-0+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] a^k b^{n-k+1}$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} \text{ (d'après la relation de Pascal)}$$

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} b^0 + \binom{n+1}{0} a^0 b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.$$ Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

Propriété **Résolution d'une équation de la forme $z^2 = a$**

On considère l'équation $z^2 = a$ avec a un réel.
Si $a > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.
Si $a < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes : $\mathrm{i}\sqrt{|a|}$ et $-\mathrm{i}\sqrt{|a|}$.

Propriété **Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels**

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$, avec a, b et c trois réels.
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation.

- **Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes : $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.**
- **Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle : $z_0 = \frac{-b}{2a}$.**
- **Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \frac{-b-\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b+\mathrm{i}\sqrt{-\Delta}}{2a}$.**
- **Si $\Delta \neq 0$, alors $az^2 + bz + c = a(z-z_1)(z-z_2)$.**

Méthode 7 Utiliser la formule du binôme de Newton

Énoncé

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer la forme algébrique de $(1+i)^4$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Pour quelle(s) valeur(s) de a le nombre complexe $z=(a+i)^3$ est-il un nombre imaginaire pur ?

Solution

1. $(1+i)^4 = \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}1^k i^{n-k}$ **1**

$= \binom{4}{0}1^0 i^4 + \binom{4}{1}1^1 i^3 + \binom{4}{2}1^2 i^2 + \binom{4}{3}1^3 i^1 + \binom{4}{4}1^4 i^0$

$= 1\times1\times1 + 4\times1\times(-i) + 6\times1\times(-1) + 4\times1\times i + 1\times1\times1$ **2**

$= 1 - 4i - 6 + 4i + 1 = -4$

2. $z=(a+i)^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}a^k i^{n-k}$ **3** $= \binom{3}{0}a^0 i^3 + \binom{3}{1}a^1 i^2 + \binom{3}{2}a^2 i^1 + \binom{3}{3}a^3 i^0$

$= 1\times1\times(-i) + 3\times a\times(-1) + 3\times a^2\times i + 1\times a^3\times 1$ **2**

$= (-3a + a^3) + i(-1+3a^2)$

z est imaginaire pur $\Leftrightarrow -3a + a^3 = 0$ **4** $\Leftrightarrow a\times(-3+a^2)=0$

$\Leftrightarrow a = 0$ ou $-3+a^2=0 \Leftrightarrow a=0$ ou $a^2=3 \Leftrightarrow a=0$ ou $a=-\sqrt{3}$ ou $a=\sqrt{3}$

Donc z est un nombre imaginaire pur si, et seulement si, $a=0$ ou $a=-\sqrt{3}$ ou $a=\sqrt{3}$.

Conseils & Méthodes

1 Appliquer la formule du binôme de Newton avec $a=1$ et $b=i$.

2 $\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=1 \qquad \binom{n}{1}=\binom{n}{n-1}=n$

$\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\times(n-k)!}$. Et $i^2=-1$.

Donc $i^3 = i^2\times i = -i$ et $i^4 = i^2\times i^2 = 1$.

3 Appliquer la formule du binôme de Newton avec a et $b=i$.

4 z est un nombre imaginaire pur si et seulement si $\mathrm{Re}(z)=0$.

À vous de jouer !

13 En utilisant la formule du binôme de Newton, déterminer la forme algébrique de $(1-i)^5$.

14 Soit $z\in\mathbb{C}$ tel que $z=(a-i)^3$, avec $a\in\mathbb{R}$. Déterminer la(les) valeur(s) de a pour lesquels z est un nombre réel.

➥ Exercices 74 à 78 p. 30

Méthode 8 Résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. **a)** $z^2+10=0$ **b)** $z^2-4z+5=0$

Solution

a) $z^2+10=0 \Leftrightarrow z^2=-10$. Dans $\mathbb{R}$, $S=\varnothing$.

Dans $\mathbb{C}$, $S=\left\{-i\sqrt{10}\,;\, i\sqrt{10}\right\}$. **1**

b) $\Delta = b^2-4ac = (-4)^2-4\times1\times5 = -4 < 0$ **2**

Dans $\mathbb{R}$, $S=\varnothing$. Dans $\mathbb{C}$, $z_1 = \dfrac{-(-4)-i\sqrt{4}}{2\times1} = 2-i$

et $z_2 = \dfrac{-(-4)+i\sqrt{4}}{2\times1} = 2+i$. **3** Donc dans $\mathbb{C}$, $S=\{2-i\,;\,2+i\}$.

Conseils & Méthodes

1 On a une équation de la forme $z^2=a$ avec $a<0$. Donc les solutions dans $\mathbb{C}$ sont $-i\sqrt{|a|}$ et $i\sqrt{|a|}$.

2 On a une équation du second degré à coefficients réels. Ici $a=1$; $b=-4$ et $c=5$. On commence par calculer Δ.

3 $\Delta<0$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

À vous de jouer !

15 Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
a) $z^2-5=0$ **b)** $z^2+5=0$ **c)** $z^2=-9$

16 Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
a) $4z^2-20z+25=0$ **b)** $2z^2-4z+4=0$

➥ Exercices 79 à 82 p. 30

5 Factorisation et racines d'un polynôme

Définition Polynôme de degré n à coefficients réels et racine

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Un **polynôme** P de degré n à coefficients réels est une expression s'écrivant sous la forme : $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$, avec $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ des réels tels que $c_n \neq 0$.
- a est une **racine** de P si et seulement si $P(a) = 0$.

Propriété Factorisation de $z^n - a^n$ par $z - a$

Soit n un nombre entier naturel non nul. Soit a un nombre complexe.
Pour tout nombre complexe z, on a : $z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e01-06

ØLJEN
Les maths en finesse

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la propriété $P(n)$:
« $z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$. ».
Initialisation : pour $n = 1$, $z^1 - a^1 = z - a = (z - a) \times Q(z)$, avec $Q(z) = 1$.
Q est un polynôme de degré 0. Donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire :
« $z^{n+1} - a^{n+1} = (z - a) \times R(z)$ avec R un polynôme de degré au plus n. ».

$$\begin{aligned} z^{n+1} - a^{n+1} &= z \times z^n - a^{n+1} = z \times [a^n + (z - a) \times Q(z)] - a^{n+1} \text{ avec } Q \text{ un polynôme de degré au plus } n - 1 \\ &= z \times a^n + z(z - a) \times Q(z) - a^{n+1} = a^n (z - a) + z(z - a) \times Q(z) = (z - a) \times [a^n + z \times Q(z)] \\ &= (z - a) \times R(z) \text{ en posant } R(z) = a^n + z \times Q(z). \end{aligned}$$

Q est un polynôme de degré au plus $n - 1$, donc R est un polynôme de degré au plus n.
Donc $P(n + 1)$ est vraie.
Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n)$ est vraie.

Propriété Factorisation d'un polynôme par $z - a$

Soit P un polynôme de degré n et a un nombre complexe tel que $P(a) = 0$.
Alors pour tout nombre complexe z : $P(z) = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Démonstration

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e01-06

Soit P un polynôme tel que $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_1 z + c_0$.
$P(z) = P(z) - P(a)$ car $P(a) = 0$.
$P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0 - (c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \ldots + c_2 a^2 + c_1 a + c_0)$.
$P(z) = c_n (z^n - a^n) + c_{n-1} (z^{n-1} - a^{n-1}) + \ldots + c_2 (z^2 - a^2) + c_1 (z - a)$
$P(z) = c_n (z - a) Q_n(z) + c_{n-1} (z - a) Q_{n-1}(z) + \ldots + c_2 (z - a) Q_2(z) + c_1 (z - a)$ d'après la propriété précédente, avec $Q_2, \ldots, Q_n$ des polynômes de degré au plus $n - 1$.
$P(z) = (z - a)[c_n Q_n(z) + c_{n-1} Q_{n-1}(z) + \ldots + c_2 Q_2(z) + c_1] = (z - a) Q(z)$
en posant $Q(z) = c_n Q_n(z) + c_{n-1} Q_{n-1}(z) + \ldots + c_2 Q_2(z) + c_1$. Q est un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Propriété Nombre de racines d'un polynôme

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Démonstration ➜ Apprendre à démontrer p. 26

VIDÉO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e01-07

Corollaire Nombre de solutions d'une équation polynomiale

Le nombre de solutions d'une équation polynomiale est inférieur ou égal à son degré.

Méthode 9 Factoriser un polynôme de la forme $z^n - a^n$

Énoncé

Factoriser $z^3 - i^3$ par $(z - i)$.

Solution

$z^3 - i^3 = (z - i)(az^2 + bz + c)$ **1**

Or $(z - i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic$ **2**

$= az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = 0 \\ c - ib = 0 \\ -ic = -i^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = ia \\ c = ib \\ c = i^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = i \\ c = i \times i \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = i \\ c = -1 \\ c = -1 \end{cases}$ Donc $z^3 - i^3 = (z - i)(z^2 + iz - 1)$.

Conseils & Méthodes

1 $z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1 = 2$ car $n = 3$.

2 Développer l'expression, puis identifier les coefficients.

À vous de jouer !

17 Factoriser $z^3 - 2^3$ par $(z - 2)$.

18 Factoriser $z^3 - (3i)^3$ par $(z - 3i)$.

↪ Exercices 83 à 88 p. 30

Méthode 10 Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels

Énoncé

On considère l'équation $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$.

1. Vérifier que 2 est une solution de l'équation.

2. Déterminer toutes les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$.

Solution

1. $2^3 - 2 \times 2^2 + 2 - 2 = 0$. Donc 2 est une solution de l'équation.

2. $z^3 - 2z^2 + z - 2$ est un polynôme de degré 3. **1**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z - 2)(az^2 + bz + c)$ **2**

$(z - 2)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - 2az^2 - 2bz - 2c$ **3**

$= az^3 + (b - 2a)z^2 + (c - 2b)z - 2c$

Par identification : $\begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = -2 \\ c - 2b = 1 \\ -2c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 + 2a \\ c = 1 + 2b \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Donc $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0 \Leftrightarrow (z - 2)(z^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow z - 2 = 0$ ou $z^2 + 1 = 0$ **4**

$\Leftrightarrow z = 2$ ou $z^2 = -1$ **5**

$\Leftrightarrow z = 2$ ou $z = -i$ ou $z = i$. Donc $S = \{2 ; -i ; i\}$.

Conseils & Méthodes

1 Pour résoudre une équation de degré 3 dont on connaît déjà une solution, factoriser afin de se ramener à un produit nul.

2 $z^3 - 2z^2 + z - 2$ un polynôme de degré 3 et 2 est une racine. D'après la propriété du cours, on a $z^3 - 2z^2 + z - 2 = (z - 2) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus 2 soit $Q(z) = az^2 + bz + c$.

3 Développer l'expression, puis identifier les coefficients.

4 Un produit est nul si, et seulement si, au moins un de ses facteurs est nul.

5 On a une équation de la forme $z^2 = a$ avec $a < 0$. Donc les solutions sont $-i\sqrt{|a|}$ et $i\sqrt{|a|}$.

À vous de jouer !

19 On considère l'équation $z^3 + 3z^2 + z + 3 = 0$.
1. Vérifier que -3 est une solution de l'équation.
2. Déterminer toutes les solutions complexes de l'équation.

20 On considère l'équation $z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0$.
1. Vérifier que 1 est une solution de l'équation.
2. Déterminer toutes les solutions complexes de l'équation.

↪ Exercices 89 à 92 p. 30

EXOS Méthodes lienmini.fr/maths-e01-03 Les rendez-vous Sésamath

Méthode 11 Résolution d'équations dans $\mathbb{C}$

Cours 4 p. 20 et Cours 5 p. 22

Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $5-2i+2iz=3z+4$ **b)** $z^2+1=z$

c) $z=2\times\overline{iz}+5i-2$ **d)** $z^4-16=0$

Solution

a) $5-2i+2iz=3z+4 \Leftrightarrow 2iz-3z=4-5+2i$ **1**

$\Leftrightarrow (-3+2i)z=-1+2i$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{-1+2i}{-3+2i}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{(-1+2i)(-3-2i)}{(-3+2i)(-3-2i)}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{3+2i-6i-4i^2}{(-3)^2-(2i)^2}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{3+2i-6i+4}{9+4}$

$\Leftrightarrow z=\dfrac{7}{13}-\dfrac{4}{13}i$

Donc $S=\left\{\dfrac{7}{13}-\dfrac{4}{13}i\right\}$.

b) $z^2+1=z \Leftrightarrow z^2-z+1=0$ **2**

$\Delta=(-1)^2-4\times1\times1=-3$. $\Delta<0$, donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées.

$z_1=\dfrac{-(-1)-i\sqrt{3}}{2\times1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2=\dfrac{-(-1)+i\sqrt{3}}{2\times1}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Donc $S=\left\{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\,;\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$.

c) Posons $z=a+ib$ avec a et b deux réels. **3** On a alors $iz=ia+i^2b=-b+ia$. Donc $\overline{iz}=-b-ia$

$z=2\times\overline{iz}+5i-2 \Leftrightarrow a+ib=2(-b-ia)+5i-2$

$\Leftrightarrow a+ib=-2b-i2a+5i-2$

$\Leftrightarrow a+ib=-2b-2+i\times(5-2a)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-2b-2\\ b=5-2a\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-2(5-2a)-2\\ b=5-2a\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-10+4a-2\\ b=5-2a\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3a=-12\\ b=5-2a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=4\\ b=-3\end{cases}$

Donc $S=\{4-3i\}$.

d) $z^4-16=0 \Leftrightarrow (z^2-4)(z^2+4)=0$ **4**

$\Leftrightarrow z^2-4=0$ ou $z^2+4=0$

$\Leftrightarrow z^2=4$ ou $z^2=-4$

Donc $S=\{-2\,;2\,;2i\,;-2i\}$.

Conseils & Méthodes

On a plusieurs méthodes pour résoudre une équation.

1 On peut chercher à isoler l'inconnue lorsque cela est possible.

2 Lorsqu'on a une équation du second degré, on calcule le discriminant et on utilise les formules du cours.

3 On peut utiliser la forme algébrique et poser $z=a+ib$ avec a et b deux réels, puis identifier les parties réelles et les parties imaginaires.

4 On peut chercher à factoriser pour se ramener à un produit nul.

À vous de jouer !

21 En utilisant la méthode de son choix, résoudre les équations suivantes.

a) $3z-4=iz+5i-1$ **b)** $z=-\dfrac{2}{z}+1$

22 En utilisant la méthode de son choix, résoudre les équations suivantes.

a) $z=4\times\overline{z}+4-2i$ **b)** $(z+i)\times z^2+(z+i)\times5=0$

Exercices 107 à 125 p. 32

Méthode 12 Étudier une suite de nombres complexes

↪ Cours 1 p. 14 et Cours 2 p. 16

Énoncé

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \mathrm{i} \times z_n + 2$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2.

2. On considère le nombre complexe $z_A = 1 + \mathrm{i}$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - z_A$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{i} \times u_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$ à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

c) En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

d) Déterminer la forme algébrique de z_{100}.

Conseils & Méthodes

1 On a $z_{n+1} = \mathrm{i} \times z_n + 2$. Remplacer n par la valeur que l'on veut. Ici $n = 0$, puis $n = 1$.

2 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z_n - z_A$. On peut donc remplacer n par l'entier naturel que l'on veut. Ici on choisit $n + 1$.

3 On exprime z_n en fonction de u_n puis on remplace dans l'expression de u_{n+1}.

4 Le résultat ressemble à celui des suites géométriques. Mais nous ne l'avons pas démontré avec les nombres complexes. Nous allons donc le démontrer par récurrence.

5 $a^{m \times n} = (a^m)^n$.

Solution

1. $z_1 = \mathrm{i} \times z_0 + 2 = \mathrm{i} \times 0 + 2 = 2$ 1

$z_2 = \mathrm{i} \times z_1 + 2 = \mathrm{i} \times 2 + 2 = 2 + 2\mathrm{i}$.

2. **a)** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = z_{n+1} - z_A$ 2

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathrm{i} \times z_n + 2 - (1 + \mathrm{i}) \\ &= \mathrm{i} \times z_n + 2 - 1 - \mathrm{i} \\ &= \mathrm{i} \times z_n + 1 - \mathrm{i} \end{aligned}$$

Or $u_n = z_n - z_A$ donc $z_n = u_n + z_A = u_n + 1 + \mathrm{i}$. 3

Donc
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathrm{i} \times (u_n + 1 + \mathrm{i}) + 1 - \mathrm{i} \\ &= \mathrm{i} \times u_n + \mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + 1 - \mathrm{i} \\ &= \mathrm{i} \times u_n \text{ car } \mathrm{i}^2 = -1 \end{aligned}$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « $u_n = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$ ». 4

Initialisation : pour $n = 0$, $u_0 = z_0 - z_A = 0 - (1 + \mathrm{i}) = -1 - \mathrm{i}$ et $(-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^0 = -1 - \mathrm{i}$.

Donc $u_0 = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^0$ donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie.

On a
$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \mathrm{i} \times u_n \\ &= \mathrm{i} \times (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n \text{ d'après l'hypothèse de récurrence.} \\ &= (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^{n+1} \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Conclusion : on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire $u_n = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = z_n - z_A$. Donc $z_n = u_n + z_A$. Donc $z_n = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n + 1 + \mathrm{i}$.

d) $z_{100} = (-1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^{100} + (1 + \mathrm{i})$. Or $\mathrm{i}^2 = -1$. Donc $\mathrm{i}^{100} = (\mathrm{i}^2)^{50} = (-1)^{50} = 1$. 5 Donc $z_{100} = (-1 - \mathrm{i}) \times 1 + 1 + \mathrm{i} = 0$.

À vous de jouer !

23 On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \mathrm{i} \times z_n + 2\mathrm{i}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2.
2. On considère le nombre complexe $z_A = -1 + \mathrm{i}$ et la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - z_A$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \mathrm{i} \times u_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1 - \mathrm{i}) \times \mathrm{i}^n$.

c) En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

d) Déterminer la forme algébrique de z_{62}.

24 On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = \mathrm{i}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 1 - \dfrac{1}{z_n}$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1, z_2 et z_3.
2. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{3n} = z_0$.
3. En déduire la valeur de z_{99}.

↪ Exercices 126 à 129 p. 33

Exercices apprendre à démontrer

DÉMO
Démonstration
lienmini.fr/maths-e01-07

ØLJEN
Les maths en finesse

La propriété à démontrer Nombre de racines d'un polynôme

Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

On utilisera un raisonnement par récurrence. On admettra que si a est une racine d'un polynôme Q de degré n, alors $Q(z) = (z - a) \times R(z)$ avec R un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Comprendre avant de rédiger

Testons la propriété pour $n = 2$. Un polynôme de degré 2 est un polynôme de la forme $Q(z) = az^2 + bz + c$, avec a, b et c trois réels, tels que $a \neq 0$. Selon le signe de $\Delta = b^2 - 4ac$, Q admet deux racines réelles (si $\Delta > 0$), une racine réelle (si $\Delta = 0$) ou deux racines complexes conjuguées (si $\Delta < 0$). Donc Q admet au plus deux racines.

Rédiger

Étape 1
On identifie la propriété à démontrer par récurrence.

→ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la propriété $P(n)$: « Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines. »

Étape 2
Pour l'initialisation, on montre que $P(0)$ est vraie.

Une fonction polynôme de degré n est une fonction de la forme $Q(z) = c_n z^n + c_{n-1}z^{n-1} + ... + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$, avec $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}, c_n$ des réels tels que $c_n \neq 0$.

→ **Initialisation** : pour $n = 0$, Un polynôme de degré nul est un polynôme constant. Un polynôme constant non nul n'admet aucune racine. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Étape 3
Pour l'hérédité, on considère un entier naturel n et on suppose que $P(n)$ est vraie. Il faut alors démontrer que $P(n + 1)$ est vraie.

→ **Hérédité :** soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n + 1)$ est vraie, c'est-à-dire : « Un polynôme non nul de degré $n + 1$ admet au plus $n + 1$ racines. »

Étape 4
On fait une disjonction de cas : soit Q n'admet aucune racine, soit il admet une racine.

Si a est une racine de Q, alors on factorise Q par $z - a$.

Au plus n racines signifie $0 ; 1 ; 2 ; \ldots n - 1$ ou n racines

→ Soit Q un polynôme de degré $n + 1$.
Si Q n'admet aucune racine, alors $P(n + 1)$ est vraie.
Si Q admet une racine a, alors $Q(z) = (z - a) \times R(z)$ avec R un polynôme de degré au plus n.

Étape 5
b est une racine de Q si, et seulement si, $Q(b) = 0$.

On reconnaît un produit nul, puis on utilise l'hypothèse de récurrence.

$a \times b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ou $b = 0$.

→ b racine de $Q \Leftrightarrow (b - a) \times R(b) = 0$
$\Leftrightarrow b - a = 0$ ou $R(b) = 0$
$\Leftrightarrow b = a$ ou $R(b) = 0$

Or R admet au plus n racines. Donc Q admet au plus $n + 1$ racines. Donc $P(n + 1)$ est vraie.

Étape 6
On conclut pour tout entier naturel n

→ **Conclusion :** on conclut que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie, c'est-à-dire un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Pour s'entraîner

Soit (z_n) la suite définie par $z_0 = 1 + \mathrm{i}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \overline{z_n}$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $z_{2n} = z_0$.

Exercices calculs et automatismes

25 Partie réelle, partie imaginaire

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Si $z_1 = 2$, alors :
a) $\mathrm{Re}(z_1) = 2$ b) $\mathrm{Im}(z_1) = 2$
c) $\mathrm{Re}(z_1) = 0$ d) $\mathrm{Im}(z_1) = 0$

2. Si $z_2 = 5\mathrm{i}$, alors :
a) $\mathrm{Re}(z_2) = 5$ b) $\mathrm{Im}(z_2) = 5$
c) $\mathrm{Re}(z_2) = 0$ d) $\mathrm{Im}(z_2) = 5\mathrm{i}$

3. Si $z_3 = 3 - 7\mathrm{i}$, alors :
a) $\mathrm{Re}(z_3) = 3$ b) $\mathrm{Im}(z_3) = 7$
c) $\mathrm{Im}(z_3) = -7$ d) $\mathrm{Im}(z_3) = -7\mathrm{i}$

4. Si $z_4 = 1 + \sqrt{2} - \mathrm{i}$, alors :
a) $\mathrm{Re}(z_4) = 1$ b) $\mathrm{Im}(z_4) = -1$
c) $\mathrm{Re}(z_4) = 1 + \sqrt{2}$ d) $\mathrm{Im}(z_4) = \sqrt{2} - \mathrm{i}$

26 Réel ou imaginaire pur

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V	F
a) $z_1 = 1 + 2\mathrm{i}$ est un nombre imaginaire pur.	☐	☐
b) $z_2 = \sqrt{2}$ est un nombre réel.	☐	☐
c) $z_3 = -\frac{1}{7}\mathrm{i}$ est un nombre imaginaire pur.	☐	☐
d) $z_4 = 2 + \mathrm{i} - 2$ n'est ni un nombre réel, ni un nombre imaginaire pur.	☐	☐

27 Forme algébrique (somme)

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \mathrm{i} + \mathrm{i} - 1$ b) $z_2 = 4 - (1 - \mathrm{i})$
c) $z_3 = (1 + 3\mathrm{i}) + (2 - \mathrm{i})$ d) $z_4 = \dfrac{2 + 4\mathrm{i}}{2}$

28 Forme algébrique (produit)

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \mathrm{i}(1 + \mathrm{i})$ b) $z_2 = (1 + \mathrm{i})^2$
c) $z_3 = (1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})$ d) $z_4 = (1 - \mathrm{i})^2$

29 Inverse d'un complexe

Méthode. Comment faire pour déterminer la forme algébrique de l'inverse d'un complexe ?

30 Forme algébrique (inverse)

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \dfrac{1}{\mathrm{i}}$ b) $z_2 = \dfrac{1}{1 + \mathrm{i}}$

31 Conjugué (1)

On considère le nombre complexe $z = 4 + 5\mathrm{i}$.

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. La forme algébrique de $\overline{z}$ est :
a) $4 + 5\mathrm{i}$ b) $4 - 5\mathrm{i}$ c) $-4 + 5\mathrm{i}$ d) $-4 - 5\mathrm{i}$

2. $z + \overline{z}$ est égal à :
a) 4 b) 8 c) 10 d) 10i

3. $z - \overline{z}$ est égal à :
a) 8 b) $-10\mathrm{i}$ c) 10 d) 10i

4. $z \times \overline{z}$ est égal à :
a) 9 b) -9 c) 41 d) -1

32 Conjugué (2)

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V	F
a) Si $z + \overline{z} = 0$ alors z est réel.	☐	☐
b) Si $z - \overline{z} = 0$ alors z est réel.	☐	☐
c) Pour tout nombre complexe z, $z \times \overline{z}$ est réel.	☐	☐

33 Équations de la forme $x^2 = a$

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

1. Dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation $z^2 = 16$ sont :
a) $S = \{-8 ; 8\}$ b) $S = \{-4 ; 4\}$
c) $S = \{-16 ; 16\}$ d) $S = \{-4\mathrm{i} ; 4\mathrm{i}\}$

2. Dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation $z^2 = -16$ sont :
a) $S = \{-8 ; 8\}$ b) $S = \{-4 ; 4\}$
c) $S = \varnothing$ d) $S = \{-4\mathrm{i} ; 4\mathrm{i}\}$

34 Calcul d'un discriminant

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

On considère l'équation $z^2 + 4z + 2 = 0$. Le discriminant Δ est égal à :

a) $\Delta = 8$ b) $\Delta = -4$
c) $\Delta = 12$ d) $\Delta = -24$

35 Équations du second degré

Choisir la(les) bonne(s) réponse(s).

Dans $\mathbb{C}$, les solutions de l'équation $x^2 - x + 1 = 0$ sont :

a) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$

c) $\dfrac{-1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ d) $\dfrac{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$

36 Factorisation

Méthode. Comment faire pour factoriser un polynôme de degré 3 lorsque l'on connaît une racine ?

Déterminer et utiliser la forme algébrique

Méthode 1 Méthode 2 p. 15

37 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque nombre ci-dessous.

a) $z_1 = 5 - 2\mathrm{i}$

b) $z_2 = \mathrm{i}\sqrt{3}$

c) $z_3 = 4 + \sqrt{2}$

d) $z_4 = 2\mathrm{i} - 3$

38 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de chaque nombre ci-dessous.

a) $z_1 = -\mathrm{i} + 2$

b) $z_2 = 1 + \sqrt{2} + \mathrm{i}$

c) $z_3 = \sqrt{2} + 6$

d) $z_4 = e^2 \times \mathrm{i}$

39 Déterminer si les nombres suivants sont des nombres réels, des nombres imaginaires purs ou des nombres complexes quelconques.

a) $z_1 = \dfrac{\mathrm{i}}{2}$

b) $z_2 = 2 + \mathrm{i} - 4 - \mathrm{i}$

c) $z_3 = 3 + \sqrt{5}$

d) $z_4 = \dfrac{4 - 2\mathrm{i}}{2}$

40 **1.** Donner la valeur de i^2 ; i^3 ; i^4 en fonction de i.

2. Déterminer la valeur de i^{50}.

3. Déterminer la valeur de $\mathrm{i}^{2\,000}$.

41 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $z_1 = \dfrac{15 + 2\mathrm{i}}{3}$

b) $z_2 = 2 + \mathrm{i} + \mathrm{i} - 1$

42 Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(1 + 2x) + \mathrm{i}(1 - 2y) = 5 + 4\mathrm{i}.$$

43 Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(-2 + 3x) + \mathrm{i}\left(\frac{3}{2}y + 4\right) = 2.$$

44 **1.** Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(1 + 3x) + \mathrm{i}(2 - y) = 0.$$

2. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(3x + y - 5) + \mathrm{i}(x - y + 7) = 0.$$

3. Déterminer les valeurs des réels x et y tels que :

$$(x + y) + \mathrm{i}(2x - 3y) = 2 + \mathrm{i}.$$

Calculer la somme et le produit de deux nombres complexes

Méthode 3 p. 17

45 Calculer les sommes suivantes et donner le résultat sous forme algébrique.

a) $(2 - 4\mathrm{i}) + (2 - 3\mathrm{i})$ **b)** $(1 - 5\mathrm{i}) + (2 + \mathrm{i})$

c) $(3 + 3\mathrm{i}) + (1 - \mathrm{i})$ **d)** $\left(2 + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right) + \left(-3 + \dfrac{4}{3}\mathrm{i}\right)$

46 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \left(1 + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}\right) + (5 - \mathrm{i})$ **b)** $z_2 = (4 + 5\mathrm{i}) - (3 + 2\mathrm{i})$

c) $z_3 = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\right) + \left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right)$ **d)** $z_4 = \left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\right) - \left(-\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}\mathrm{i}\right)$

47 Calculer les produits suivants et donner le résultat sous forme algébrique.

a) $3(2 + 4\mathrm{i})$ **b)** $\mathrm{i}(3 + \mathrm{i})$

c) $-\mathrm{i}(3 - 2\mathrm{i})$ **d)** $(1 + \mathrm{i})(3 - 2\mathrm{i})$

48 Calculer les produits suivants et donner le résultat sous forme algébrique.

a) $(\sqrt{2} + \mathrm{i}) \times (1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$

b) $\left(\dfrac{3}{2} + 4\mathrm{i}\right)\left(2 + \dfrac{1}{5}\mathrm{i}\right)$

49 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = (2 + \mathrm{i})^2$ **b)** $z_2 = (2 - \mathrm{i})^2$

c) $z_3 = (2 + \mathrm{i})(2 - \mathrm{i})$ **d)** $z_4 = (2 + \mathrm{i})(\mathrm{i} - 2)$

50 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

a) $(2\mathrm{i} - 3)(3 - 2\mathrm{i})$ **b)** $\mathrm{i}(3 + \mathrm{i})$

c) $(2 + \mathrm{i})(1 - 2\mathrm{i}) + 1 - 5\mathrm{i}$ **d)** $(1 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i})$

51 Soit a et b deux réels.

Déterminer la forme algébrique de :

a) $(a + \mathrm{i}b)^2$ **b)** $(a - \mathrm{i}b)^2$

c) $(a + \mathrm{i}b)(a - \mathrm{i}b)$ **d)** $(a + \mathrm{i}b)(2a - \mathrm{i}b)$

52 En posant $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b deux réels, résoudre les équations suivantes.

a) $z \times \mathrm{i} = 3 + \mathrm{i}$

b) $z \times (1 + \mathrm{i}) = 7 + 3\mathrm{i}$

53 En posant $z = a + \mathrm{i}b$, avec a et b deux réels, résoudre les équations suivantes.

a) $(4 + \mathrm{i}) \times z = \mathrm{i}$

b) $(\mathrm{i} - 2) \times z = 3$

Calculer l'inverse et le quotient de nombres complexes

Méthode 4 p. 17

54 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \dfrac{1}{2i}$ **b)** $z_2 = \dfrac{1}{2+3i}$

c) $z_3 = \dfrac{1}{5-2i}$ **d)** $z_4 = \dfrac{1}{2i-5}$

55 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \dfrac{1}{-i}$ **b)** $z_2 = \dfrac{1}{4+7i}$

c) $z_3 = \dfrac{1}{10-3i}$ **d)** $z_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+i}$

56 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \dfrac{5}{2i}$ **b)** $z_2 = \dfrac{1-i}{2+3i}$

c) $z_3 = \dfrac{1+i}{5-2i}$ **d)** $z_4 = \dfrac{3+2i}{2i-5}$

57 Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \dfrac{7}{i}$ **b)** $z_2 = \dfrac{7-2i}{3+4i}$

c) $z_3 = \dfrac{1+i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{2}}$ **d)** $z_4 = \dfrac{i+2}{i-3}$

58 On considère les deux nombres complexes $z_1 = 15 - 8i$ et $z_2 = 23 + 14i$. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants.

a) $\dfrac{1}{z_1}$ **b)** $\dfrac{1}{z_2}$ **c)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **d)** $\dfrac{z_2}{z_1}$

59 Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = \dfrac{(2+3i)(3+2i)}{(2+3i)+(3+2i)}$

b) $z_2 = \dfrac{(2+3i)(3+2i)}{(2+3i)-(3+2i)}$

60 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $(3-5i)z = 1$

b) $(-2i)z = 1$

61 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes . On donnera les solutions sous forme algébrique.

a) $iz = 1 - i$

b) $(2+i)z = 1 + 3i$

Déterminer et utiliser le conjugué d'un nombre complexe

Méthode 5 Méthode 6 p. 19

62 Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants.

a) $9 + i$ **b)** $13 - 24i$

c) $5i - 2$ **d)** $\dfrac{3 - i\sqrt{7}}{7}$

63 Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants.

a) $\sqrt{7} + i\pi$ **b)** $3 + 5i + \sqrt{2}$

c) $\dfrac{4}{3} + 2$ **d)** $-i\sqrt{2}$

64 Soit z un nombre complexe. Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants en fonction de $\overline{z}$.

a) $3z$ **b)** $z + 5 - i$ **c)** $z^2 + 2z$

d) $\dfrac{z+1}{3}$ **e)** $iz + 2$ **f)** $\dfrac{i - z}{z+1}$

65 Soit z un nombre complexe. Déterminer les conjugués des nombres complexes suivants en fonction de z et $\overline{z}$.

a) $2z - \overline{z}$ **b)** $z + \dfrac{1}{\overline{z}}$ **c)** $z^2 + \overline{z}^2$

d) $i\overline{z}$ **e)** $z + i\overline{z}$ **f)** $-2\overline{z}$

66 Démo — Démontrer que pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

67 **1.** Démontrer qu'un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$.
2. Démontrer qu'un nombre complexe z est réel si, et seulement si, $\overline{z} = z$.

68 Soit z un nombre complexe. Déterminer si les nombres suivants sont des nombres réels, des nombres imaginaires purs ou des nombres complexes quelconques.

a) $z^2 + \overline{z}^2$ **b)** $z^2 - \overline{z}^2$

69 Démo — Montrer que pour tout nombre complexe z non nul, $\dfrac{z - \overline{z}}{z \times \overline{z}}$ est un nombre imaginaire pur.

70 Résoudre les équations suivantes.

a) $\overline{z} = 2\overline{z} + 1$ **b)** $-\overline{z} = 1 + i$

c) $z + 5\overline{z} = 7 - 8i$ **d)** $z = 3\overline{z} + 5 - i$

Coup de pouce **c)** et **d)** Poser $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

71 Résoudre les équations suivantes.

a) $z + \overline{z} = 3i$ **b)** $(3+i)\overline{z} + 2z = 0$

c) $-2\overline{z} + (2+i)\overline{z} = 1$ **d)** $2i\overline{z} = 3i + 2iz$

72 Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b des réels, on pose $f(z) = 3\overline{z} + i - 2$.

1. Exprimer $\mathrm{Re}(f(z))$ et $\mathrm{Im}(f(z))$ en fonction de a et b.
2. L'équation $f(z) = z$ admet-elle des solutions ? Si oui, laquelle (lesquelles) ?

73 Pour tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b des réels, on pose $f(z) = 3\overline{z} + z - 5$.

1. Exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z)$ en fonction de a et b.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
a) $f(z) = 2$
b) $f(z) = 4i$
c) $f(z) = z$

Utiliser la formule du binôme de Newton

Méthode 7 p. 21

74 **1.** En utilisant la formule du binôme de Newton, développer les expressions suivantes.
a) $(2 + i)^4$ **b)** $(1 - 2i)^5$
2. Quel est le coefficient de x^6 dans le développement de $(x + 3)^8$?

75 En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

76 **1.** Développer $(x - 1)^3$.
2. En déduire la valeur exacte de 999^3 sans calculatrice.

77 **1.** Développer et simplifier $(x + 1)^4 - (x - 1)^4$.
2. En déduire la valeur exacte de $1\,001^4 - 999^4$ sans calculatrice.

78 Soit z le nombre complexe tel que $z = (1 + ib)^3$.
1. Pour quelle(s) valeur(s) de b le nombre z est-il réel ?
2. Pour quelle(s) valeur(s) de b le nombre z est-il imaginaire pur ?

Résoudre des équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Méthode 8 p. 21

79 Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
a) $z^2 + 64 = 0$ **b)** $z^2 - 3 = 0$
c) $z^2 - 4 = 2$ **d)** $z^2 + 21 = 8$

80 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
a) $z^2 - 3z = 0$ **b)** $z^2 + z + 1 = 0$
c) $4z^2 - 4z + 5 = 0$ **d)** $-2z^2 + 6z + 5 = 0$

81 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
a) $z^2 = -7z$ **b)** $2z^2 = 3z - 2$
c) $-2z + z^2 + 2 = 0$ **d)** $-8 = 3z^2$

82 Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.
a) $3z^2 - 2z = 1$ **b)** $2z^2 = z + 3$
c) $\dfrac{z^2 + 9}{3} = 0$ **d)** $\dfrac{3 - z^2}{3} = 3$

Factoriser un polynôme

Méthode 9 p. 23

83 Factoriser :
a) $z^2 - 2^2$ par $(z - 2)$.
b) $z^3 - 3^3$ par $(z - 3)$.

84 **1.** Exprimer $z^3 + 3^3$ sous la forme $z^3 - a^3$ avec a un réel.
2. En déduire une factorisation de $z^3 + 3^3$.

85 **1.** Exprimer i^3 en fonction de i.
2. En déduire une factorisation de $z^3 + i$.

86 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :
$$P(z) = z^3 - z^2 + 2z - 2.$$
1. Vérifier que 1 est une racine de P.
2. Factoriser $P(z)$ par $(z - 1)$.

87 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :
$$P(z) = z^4 + 2z^3 + 3z + 4.$$
1. Vérifier que -1 est une racine de P.
2. Factoriser $P(z)$ par $(z + 1)$.

88 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :
$$P(z) = -2z^3 + 2z^2 + 20z + 16.$$
1. Vérifier que -2 est une racine de P.
2. En déduire une factorisation de $P(z)$.

Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels

Méthode 10 p. 23

89 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :
$$P(z) = z^3 - 5z^2 + 9z - 9.$$
1. Montrer que 3 est une racine de P.
2. Déterminer toutes les racines de P.
3. Écrire $P(z)$ comme produit de facteurs du premier degré.

90 On considère l'équation
$$(E) : z^3 - 3z^2 + 4z - 12 = 0.$$
1. Montrer que 3 est solution de l'équation (E).
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E).

91 On considère l'équation
$$(E') : z^3 - 1 = 0.$$
1. Déterminer une solution évidente de (E').
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E').

92 On considère l'équation
$$(E'') : z^3 + z^2 + z + 1 = 0.$$
1. Déterminer une solution entière de (E'').
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E'').

Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$

93 1. Conjecturer une règle donnant i^n en fonction de i, suivant les valeurs de n.
2. Démontrer la conjecture par récurrence.
3. Donner la valeur de $i^{2\,021}$.

94 Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et justifier.
Proposition 1 Le quotient de deux nombres imaginaires purs est un nombre réel.
Proposition 2 Le quotient de deux nombres réels est un nombre imaginaire pur.

95 On considère un nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b deux réels.
À quelle(s) condition(s) sur a et b le nombre $(1 - i)z$ est-il réel ?

Coup de pouce Pour les exercices **96** à **98** : par défaut, un programme **Python** ne fait pas de calcul formel ; il renverra donc une valeur approchée des parties réelles et imaginaires.

96 Soit deux nombres complexes $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec a_1, b_1, a_2 et b_2 des nombres réels.
1. Déterminer la forme algébrique de $z_1 \times z_2$.
2. Écrire une fonction en **Python** ayant pour paramètres les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2 et qui renvoie les parties réelles et imaginaires de $z_1 \times z_2$.

97 Soit z_1 un nombre complexe non nul tel que $z_1 = a_1 + ib_1$ avec a_1 et b_1 des réels.
1. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{1}{z_1}$.
2. Écrire une fonction en **Python** ayant pour paramètres les parties réelles et imaginaires de z_1 et qui renvoie les parties réelles et imaginaires de $\dfrac{1}{z_1}$.

98 Soit deux nombres complexes $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ avec a_1, b_1, a_2 et b_2 des nombres réels.
On suppose z_2 différent de 0.
1. Déterminer la forme algébrique de $\dfrac{z_1}{z_2}$.
2. Écrire une fonction en **Python** ayant pour paramètres les parties réelles et imaginaires de z_1 et z_2 et qui renvoie les parties réelles et imaginaires de $\dfrac{z_1}{z_2}$.

99 Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $\left(\dfrac{1}{1-i}\right)^2$ b) $7 + \dfrac{3+10i}{5-5i}$

c) $\dfrac{1}{3-2i} + \dfrac{2i}{2-i}$ d) $\dfrac{2-i}{3+i} - \dfrac{2}{1-i}$

Conjugué

100 Déterminer la forme algébrique des conjugués des nombres complexes suivants.

a) $z_1 = 7 - \left(3 + \dfrac{5}{3}i\right)$

b) $z_2 = (3 - 5i) + \sqrt{2}$

c) $z_3 = \dfrac{3}{2} + 3i + (1 - i)$

d) $z_4 = (5 - i)(\sqrt{2} + 3i)$

101 On considère le nombre complexe :
$$z = \frac{2+3i}{7-i}.$$
1. Déterminer la forme algébrique de z.
2. En utilisant les propriétés des conjugués, en déduire la valeur de $z + \overline{z}$ et de $z - \overline{z}$.

102 Démo Sans utiliser la forme algébrique, montrer que pour tout nombre complexe z, $z - \overline{z} + \dfrac{3}{2}i$ est un nombre imaginaire pur.

103 Pour tout nombre complexe z, on pose :
$$Z = (z \times \overline{z} \times i)^3.$$
Déterminer si pour tout $z \in \mathbb{C}$, Z est un nombre réel, un nombre imaginaire pur, ou un nombre complexe quelconque.

104 Pour tout nombre complexe z, on pose :
$$Z = z + 2\overline{z}.$$
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que le nombre Z soit :
a) réel.
b) imaginaire pur.

105 Pour tout nombre complexe z, on pose :
$$Z = \frac{z+1}{\overline{z}+1}.$$
Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tel que le nombre Z soit :
a) réel.
b) imaginaire pur.

106 Démo On pourra utiliser comme prérequis que pour tous nombres complexes z_1 et z_2, on a $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.
1. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.
2. En déduire que pour tout entier naturel n et pour tout nombre complexe z, $z^n + \overline{z}^n$ est un nombre réel.
3. Démontrer que pour tout entier naturel n, le nombre complexe $(2 - i)^{2n} + (3 + 4i)^n$ est un nombre réel.

Équations dans $\mathbb{C}$

Méthode 11 p. 24

107 1. Factoriser $z^3 - 1$ par $z - 1$.
2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$$(E) : z^3 - 1 = 0.$$
3. On note j la solution de (E) dont la partie imaginaire est strictement positive.
Donner la forme algébrique de j.
4. Démontrer les égalités suivantes.
a) $j^3 = 1$ b) $j^2 + j + 1 = 0$
c) $j^2 = \overline{j}$ d) $\dfrac{1}{j} = \overline{j}$

108 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$. On donnera les résultats sous forme algébrique.
a) $(1 + i)z = 1 - i$ b) $\dfrac{z+1}{z-1} = 2i$
c) $(2z + 1 - i) \times (iz + 3) = 0$ d) $\dfrac{iz+1}{z-3i} = 2 + i$

109 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$. On donnera les résultats sous forme algébrique.
a) $-2iz = 3z + 1$ b) $\dfrac{2i\overline{z}+i}{z-1-i} = 3$
c) $(z - i)^2 = (z + 1 + i)^2$ d) $\dfrac{2}{z} + 3i = -2 - 5i$

110 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{z-i}{z-(2-i)} = 3$.

111 Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 dont la somme et le produit valent 2.

112 Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$. Écrire les solutions sous la forme la plus simplifiée possible.
a) $\dfrac{3+z}{3-z} = z$ b) $(z - 2)^2 = -4$
c) $(z - 2)^2 = (3 + iz)^2$ d) $z^2 = 3iz$

113 Démo On considère l'équation
$az^2 + bz + c = 0$. On note Δ son discriminant.
On veut démontrer que si $\Delta < 0$ alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.
On rappelle qu'en classe de Première, nous avons démontré que $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
On suppose que $\Delta < 0$.
1. Écrire $\dfrac{\Delta}{4a^2}$ comme le carré d'un nombre complexe.
2. En déduire une factorisation de $az^2 + bz + c$.
3. En reconnaissant un produit nul, résoudre $az^2 + bz + c = 0$.

114 En utilisant le résultat du logiciel de calcul formel suivant, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
$$z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26 = 0.$$

1	`factoriser(z^4-6z^3+23z^2-34z+26)`
	$(z^2-4*z+13)*(z^2-2*z+2)$

115 Déterminer deux nombres complexes z_1 et z_2 tels que $\begin{cases} z_1 + z_2 = 3 \\ z_1 \times z_2 = 5 \end{cases}$

116 On veut résoudre l'équation
$$(E) : z^2 + 2iz - 2 = 0.$$
1. Développer $(z + i)^2$.
2. En déduire que l'équation (E) est équivalente à $(z + i)^2 - 1 = 0$.
3. En déduire les solutions de (E).

117 On veut résoudre l'équation
$$(E') : z^2 + iz + c = 0 \text{ où } c \text{ est un réel.}$$
1. Développer $\left(z + \dfrac{i}{2}\right)^2$.
2. En déduire que l'équation (E′) est équivalente à
$$\left(z + \frac{i}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} + c = 0.$$
3. Quelle condition sur c faut-il imposer pour que les solutions de (E′) soient imaginaires purs ?
4. Déterminer dans ce cas les solutions de (E′).

118 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les systèmes d'équations suivants.
a) $\begin{cases} z + z' = 2 - 5i \\ z + 3z' = i - 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2z + 3z' = 1 \\ z - z' = i \end{cases}$
c) $\begin{cases} -2z + 2z' = 1 + i \\ z + 3z' = 5 \end{cases}$ d) $\begin{cases} z + iz' = 2 \\ 2z + 2z' = 2 + 3i \end{cases}$

119 On considère la fonction f qui à tout nombre complexe z associe $f(z) = z^2 + 2z + 9$.
1. Calculer l'image de $-1 + i\sqrt{3}$ par la fonction f.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z) = 5$.
3. Soit λ un nombre réel. On considère l'équation $f(z) = \lambda$ d'inconnue z.
Déterminer l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles l'équation $f(z) = \lambda$ admet deux solutions complexes conjuguées.

D'après Bac S 2014

120 On considère l'équation
$$(E) : z^4 + 2z^3 - z - 2 = 0,$$
ayant pour inconnue le nombre complexe z.
1. Donner une solution entière de (E).
2. Démontrer que, pour tout nombre complexe z,
$z^4 - 2z^3 - z - 2 = (z^2 + z - 2)(z^2 + z + 1)$.
3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

D'après Bac S 2017

121 On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$ où z est un nombre complexe.
1. Montrer que si le nombre complexe z est solution de l'équation (E) alors les nombres complexes $-z$ et $\overline{z}$ sont aussi solutions de l'équation (E).
2. On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + \mathrm{i}$.
Vérifier que z_0 est solution de l'équation (E).
3. Déduire des deux questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).
4. L'équation (E) admet-elle d'autres solutions que celles citées dans les questions **2.** et **3.** ?

D'après Bac S 2010

122 Déterminer si la proposition suivante est vraie ou fausse en justifiant.
« $z^{10} + z^2 + 1 - \mathrm{i} = 0$ admet une solution réelle. »

123 On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :
$$P(z) = z^3 - (2+\mathrm{i}\sqrt{2})z^2 + 2(1+\mathrm{i}\sqrt{2})z - 2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$
1. Montrer que le nombre complexe $z_0 = \mathrm{i}\sqrt{2}$ est une racine de P.
2. a) Déterminer les réels a et b tels que :
$$P(z) = (z - \mathrm{i}\sqrt{2})(z^2 + az + b).$$
b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $P(z) = 0$.

D'après Bac S 2012

124 On considère la fonction f définie pour tout $z \in \mathbb{C}$ par :
$$f(z) = z + \mathrm{i}.$$
1. Déterminer la forme algébrique de l'image de $\sqrt{2} + 5\mathrm{i}$ par la fonction f.
2. Déterminer la forme algébrique du ou des antécédents de $\sqrt{2} + 5\mathrm{i}$ par la fonction f.

125 **1.** En posant $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels, résoudre $z^2 = \overline{z}$.
Pour la suite de l'exercice, on notera z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive
2. Montrer que $z_0 \times \overline{z_0} = 1$.
3. Donner la forme algébrique de z_0, z_0^2 et z_0^3.
4. Démontrer que pour tout entier naturel n, $z_0^{3n} = 1$.
5. En déduire la valeur de z_0^{3n+1} et z_0^{3n+2} pour tout entier naturel n.
6. En déduire la valeur de z_0^{999} et z_0^{1000}.

Suites de nombres complexes

Méthode 12 p. 25

126 On définit la suite de nombres complexes (z_n) par $z_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}\mathrm{i}$.
Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - \mathrm{i}$.
1. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n pour tout entier naturel n.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - \mathrm{i})$.
3. En déduire l'expression de z_n en fonction de n.

127 On définit la suite de nombres complexes (z_n) par $z_0 = 1 + 2\mathrm{i}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = 2\mathrm{i}z_n + 5$.
1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2.
2. Conjecturer l'expression de z_n en fonction de n.
3. Démontrer par récurrence la conjecture faite en **2**.
4. En déduire la valeur de $z_{2\,020}$.

128 On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 1 - \mathrm{i}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{z_n}$.
1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et z_2.
2. Conjecturer l'expression de z_n en fonction de n.
3. Démontrer par récurrence la conjecture faite en **2**.

129 Soit λ un nombre complexe non nul et différent de 1. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (z_n) de nombres complexes par $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \lambda z_n + \mathrm{i} \end{cases}$
1. a) Vérifier les égalités $z_1 = \mathrm{i}$; $z_2 = (\lambda + 1)\mathrm{i}$; $z_3 = (\lambda^2 + \lambda + 1)\mathrm{i}$.
b) Démontrer que, pour tout entier naturel n positif ou nul,
$$z_n = \frac{\lambda^n - 1}{\lambda - 1} \times \mathrm{i}.$$
2. Étude du cas $\lambda = \mathrm{i}$.
a) Montrer que $z_4 = 0$.
b) Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+4} en fonction de z_n.
3. a) On suppose maintenant qu'il existe un entier naturel k tel que $\lambda^k = 1$. Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+k} = z_n$.
b) Réciproquement, montrer que s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout entier naturel n, on ait l'égalité $z_{n+k} = z_n$, alors $\lambda^k = 1$.

Travailler l'oral

130 Préparer un exposé sur l'introduction historique des nombres complexes.
Indication : on pourra par exemple parler de Tartaglia, Cardan, Bombelli, ou encore Descartes ou Girard.

131 Proposer une équation du second degré à coefficient réels, puis la résoudre, en expliquant la méthode.

132 Proposer une équation du 3e degré à coefficient réels admettant une racine évidente, puis la résoudre, en expliquant la méthode.

133 Calcul algébrique dans $\mathbb{C}$

Les trois questions sont indépendantes.

1. On considère les deux nombres complexes :

$$z = 7 + 2i \text{ et } z' = i - 3.$$

Déterminer la forme algébrique de :

a) $z + z'$

b) $z - z'$

c) $z \times z'$

d) z^2

e) $\dfrac{1}{z}$

2. Pour tout nombre complexe z, on considère le nombre complexe :

$$Z = z^2 + 3 + \overline{z}^2 + z \times \overline{z}.$$

Montrer que pour tout nombre complexe z, Z est un nombre réel.

3. On considère le nombre complexe $z'' = \dfrac{8+i}{9-2i}$.

a) Déterminer la forme algébrique de z''.

b) En déduire sans calcul la valeur de

$$\frac{8+i}{9-2i} + \frac{8-i}{9+2i} \qquad \text{et de } \frac{8+i}{9-2i} - \frac{8-i}{9+2i}.$$

134 Équations dans $\mathbb{C}$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $(2i - 5)z + 2 = i$

b) $2z + 3\overline{z} + i - 2 = 0$

c) $x^2 + x + 1 = 0$

d) $x^4 - 25 = 0$

2. On considère l'équation suivante

$$(E) : x^3 - 3x^2 + x - 3 = 0.$$

a) Montrer que si z est solution de (E), alors $\overline{z}$ est solution de (E).

b) Vérifier que 3 et i sont solutions de (E).

c) Quel est le nombre maximum de solutions que peut avoir l'équation (E) ?

d) Sans calcul, en déduire toutes les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$.

3. On considère l'équation

$$(E') : 2x^3 - 8x^2 + 28x - 40 = 0.$$

a) Vérifier que 2 est solution de l'équation (E').

b) En déduire une factorisation de $2x^3 - 8x^2 + 28x - 40$.

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$, l'équation (E').

135 Binôme de Newton

1. Rappeler la formule du binôme de Newton.
2. Démontrer la formule du binôme de Newton.

Coup de pouce La démonstration se fait par récurrence.

3. Développer pour tout réel x, $(x - 2i)^4$.
4. Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de x le nombre complexe $(x - 2i)^4$ est réel.
5. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

136 Suites de nombres complexes

On considère la suite (z_n) définie par $z_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = iz_n - 4$.

A ▶ 1. Déterminer la forme algébrique de z_1, z_2 et z_3.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $z_n = a_n + ib_n$ où a_n est la partie réelle de z_n et b_n est la partie imaginaire de z_n.

a) Donner la valeur de a_0 et b_0.

b) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

c) Compléter le programme en **Python** suivant afin qu'il renvoie la partie réelle et la partie imaginaire de z_n.

```
def f(n):
    a=... .
    b=... .
    for i in range(1,n+1):
        c=.................... .
        a=.................... .
        b=.................... .
return([a,b])
```

B ▶ On considère le nombre complexe $w = -2 - 2i$.

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = z_n - w$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = i \times u_n$.
2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = (2 + 2i) \times i^n$.
3. En déduire l'expression de z_n en fonction de n.
4. a) Donner la valeur de i^2 et en déduire la valeur de i^{50} et i^{100}.

b) En déduire la forme algébrique de z_{50} et z_{100} sans calculatrice.

137 Fonctions dans $\mathbb{C}$

On considère la fonction f définie pour tout nombre complexe z différent de -1 par $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.

1. Déterminer la forme algébrique des images par f de

a) 1

b) 2i

2. Déterminer la forme algébrique du ou des antécédents de $1 + i$ par f.
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = z$.

138 Conjugués

Démo

1. Soit z un nombre complexe tel que $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

a) Démontrer que z est un nombre réel si, et seulement si, $\overline{z} = z$.

b) Démontrer que z est un nombre imaginaire pur si, et seulement si, $\overline{z} = -z$.

2. Démontrer que, pour tous nombres complexes z et z', $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$.

3. Démontrer que, pour tout entier naturel n, et tout nombre complexe z, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$.

Ensemble des nombres complexes

- **Définition de $\mathbb{C}$**
- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $i^2 = -1$
- L'addition et la multiplication ont les mêmes propriétés que dans $\mathbb{R}$.
- **Forme algébrique**

$z = a + ib$ avec a et b deux réels.

$a = \mathrm{Re}(z)$ (partie réelle de z)

$b = \mathrm{Im}(z)$ (partie imaginaire de z)

- **Égalité dans C**

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$$

Opérations dans $\mathbb{C}$

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' des réels tel que $z \neq 0$.

- **Addition**

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + ib) + (a' + ib') \\ &= (a + a') + i(b + b') \end{aligned}$$

- **Multiplication**

$$\begin{aligned} z \times z' &= (a + ib) \times (a' + ib') \\ &= aa' + iab' + iba' + i^2bb' \\ &= (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \end{aligned}$$

- **Opposé**

$$\begin{aligned} -z &= -(a + ib) \\ &= -a - ib \end{aligned}$$

- **Inverse**

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} = \frac{1 \times (a - ib)}{(a + ib)(a - ib)}$$

$$= \frac{a - ib}{a^2 - (ib)^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} - i\frac{b}{a^2 + b^2}$$

- **Quotient**

$$\frac{z'}{z} = \frac{a' + ib'}{a + ib} = \frac{(a' + ib')(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)}$$

$$= \frac{a'a - iba' + ib'a + bb'}{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{aa' + bb'}{a^2 + b^2} + i\frac{ab' - a'b}{a^2 + b^2}$$

Conjugué

Soit $z = a + ib$ avec a et b deux réels.

- **Définition**

Le conjugué de z, noté $\overline{z}$ est défini par $\overline{z} = a - ib$.

- **Propriétés**

- $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\mathrm{Im}(z)$
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$
- $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$
- $\overline{\overline{z}} = z$
- $\overline{-z} = -\overline{z}$
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$
- Si $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$

Formule du binôme de Newton

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $b \in \mathbb{C}$. Pour: tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Équations du second degré

- $\boldsymbol{z^2 = a}$
- Si $a > 0$, alors $S = \{-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}\}$
- Si $a < 0$, alors $S = \{-i\sqrt{|a|}\ ;\ i\sqrt{|a|}\}$
- $\boldsymbol{az^2 + bz + c = 0}$ **avec** $\boldsymbol{a \neq 0}$

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, alors $S = \left\{\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\ ;\ \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$
- Si $\Delta = 0$, alors $S = \left\{-\frac{b}{2a}\right\}$
- Si $\Delta < 0$, alors $S = \left\{\frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}\ ;\ \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

Factorisation de polynômes

- **Factorisation de $z^n - a^n$**

Soit $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n - a^n = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$.

- **Factorisation d'un polynôme**

Soit P un polynôme de degré n et $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) = 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - a) \times Q(z)$ avec Q un polynôme de degré au plus $n - 1$.

Racines de polynômes

- Un polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.
- Le nombre de solutions d'une équation polynômiale est inférieur ou égal à son degré.

Préparer le BAC Je me teste

Je dois être capable de...		Parcours d'exercices
▶ Déterminer et utiliser la forme algébrique d'un nombre complexe	Méthode 1, Méthode 2	1, 2, 37, 38, 3, 4, 42, 43
▶ Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes et résoudre une équation linéaire $az = b$	Méthode 3, Méthode 4	5, 6, 45, 46, 7, 8, 54, 55
▶ Déterminer le conjugué d'un nombre complexe et résoudre une équation simple faisant intervenir z et $\overline{z}$	Méthode 5, Méthode 6	9, 10, 62, 63, 11, 12, 70, 71
▶ Utiliser la formule du binôme de Newton	Méthode 7	13, 14, 74, 75
▶ Résoudre une équation polynomiale de degré 2 à coefficients réels	Méthode 8	15, 16, 79, 80
▶ Factoriser un polynôme dont une racine est connue	Méthode 9	17, 18, 83, 84
▶ Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue	Méthode 10	19, 20, 89, 90

EXOS
QCM interactifs
lienmini.fr/maths-e01-09

QCM **Pour les exercices suivants, choisir la (les) bonnes réponse(s).**

	A	B	C	D
139 i^3 est égal à :	1	i	$-i$	-1
140 La partie réelle de $(11+2i)(5-i)$ est :	53	55	57	-1
141 La partie imaginaire de $\dfrac{11+2i}{2-i}$ est :	2	3	4	-1
142 Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $Z = z \times \overline{z} + 2 - i$. Alors le conjugué de Z est :	$\overline{z} \times \overline{z} + 2 - i$	$z \times \overline{z} - 2 + i$	$\overline{z} \times \overline{z} + 2 + i$	$z \times \overline{z} + 2 + i$
143 La solution de $(i+1)z + 1 = i$ est :	$\dfrac{i-1}{i+1}$	$i+1$	i	$i-1$
144 L'équation $z^2 - 4z + 5 = 0$ a pour solution dans $\mathbb{C}$:	pas de solution	$\{-2-i\,;2+i\}$	$\{2-i\,;2+i\}$	$\{2-3i\,;2+3i\}$
145 L'équation $z + 2i\overline{z} = 2 - 5i$ a pour solution dans $\mathbb{C}$:	1	$\dfrac{8}{3} - \dfrac{1}{3}i$	$2 - \dfrac{5}{2}i$	$-4+3i$
146 $(1+i)^5$ est égal à :	$1+i$	$-4-4i$	$4+4i$	$-1-i$
147 Une factorisation de $x^3 - 1$ est $(x-1) \times Q(x)$ avec $Q(x)$ égal à :	(x^2+x+1)	(x^2-x+1)	(x^2+x-1)	(x^2-x-1)

148 Utiliser la forme algébrique

1. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $z = 2\text{i} - 5$.

2. Soit x et y deux réels.
Pour quelles valeurs de x et de y a-t-on $(x + 2y) + \text{i}(x - 2y + 3) = 2 + \text{i}$? Méthode 1 Méthode 2 p. 15

149 Calculer dans $\mathbb{C}$

On considère les deux nombres complexes $z = 4 + 7\text{i}$ et $z' = -2 + 5\text{i}$.
Déterminer la forme algébrique de :

a) $z + z'$

b) $z - z'$

c) $z \times z'$

d) z^2

e) $\dfrac{1}{z'}$

f) $\dfrac{z}{z'}$ Méthode 3 Méthode 4 p. 17

150 Utiliser le conjugué d'un nombre complexe

1. On considère le nombre complexe $z_1 = \text{i} - 2$.
Déterminer la forme algébrique du conjugué de z.

2. Pour tout nombre complexe z, on pose $Z = z - \overline{z} + \text{i}$.
Démontrer que Z est un nombre imaginaire pur.

3. On considère le nombre complexe $z' = \dfrac{11+\text{i}}{1-2\text{i}}$.

a) Déterminer la forme algébrique de z'.

b) En déduire sans calcul la valeur de $\dfrac{11+\text{i}}{1-2\text{i}} + \dfrac{11-\text{i}}{1+2\text{i}}$ et celle de $\dfrac{11+\text{i}}{1-2\text{i}} - \dfrac{11-\text{i}}{1+2\text{i}}$. Méthode 4 p. 17 Méthode 5 p. 19

151 Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $(1 - 2\text{i})z = 3 + \text{i}$

b) $-5\overline{z} + \text{i} = 7$

c) $z + 2\overline{z} - 4 = \text{i}$ Méthode 4 p. 17 Méthode 6 p. 19

d) $2z^2 - 3z + 10 = 0$

e) $z^4 = 121$ Méthode 8 p. 21 Méthode 11 p. 24

152 Utiliser le binôme de Newton

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $(2 + 3\text{i})^4$.

2. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$.

3. Quel est le coefficient de x^7 dans le développement de $(x + 2)^{10}$? Méthode 7 p. 21

153 Factorisation de polynômes

Factoriser les polynômes suivants.

a) $x^4 - 1$ **b)** $x^3 - 8$ Méthode 9 p. 23

154 Équation de degré 3

1. On considère l'équation suivante :
$$2x^3 - 2x^2 - 24x = 0.$$

a) Déterminer une solution évidente de l'équation.

b) Résoudre l'équation dans $\mathbb{C}$.

2. On considère l'équation suivante :
$$x^3 - 3x^2 + 25x + 29 = 0.$$

a) Vérifier que -1 est solution de l'équation.

b) Déterminer une factorisation de $x^3 - 3x^2 + 25x + 29$.

c) En déduire toutes les solutions complexes de l'équation. Méthode 10 p. 23

155 Suites de nombres complexes

Algo

On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par $z_0 = 1 - \text{i}$ et pour tout entier naturel, $z_{n+1} = (1 + \text{i})z_n$.

1. Déterminer la forme algébrique de z_1 et de z_2.

2. Démontrer que pour tout nombre complexe z, $z \times \overline{z}$ est un nombre réel.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = z_n \times \overline{z_n}$.

a) Calculer u_0, u_1 et u_2.

b) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}$.

c) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 2.

d) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

e) Déterminer la limite de la suite (u_n).

4. On souhaite déterminer la plus petite valeur de n tel que $u_n > 1\,000$.

a) Compléter le programme en **Python** suivant.

```
u=...
n=0
while ... :
        n=...
        u=...
print(....)
```

b) Déterminer la valeur de cet entier à l'aide de la calculatrice. Méthode 12 p. 25

156 Fonction et nombre complexe

Soit f la fonction définie pour tout nombre complexe z différent de -2 par $f(z) = \dfrac{z-4}{z+2}$.

1. Déterminer la forme algébrique de l'image par f de :

a) 3 **b)** i

2. Déterminer la forme algébrique du ou des antécédents par f de :

a) 3 **b)** i

3. Déterminer le ou les nombres complexes z tels que $f(z) = -z$. Méthode 1 p. 15 Méthode 4 p. 17 Méthode 8 p. 21 Méthode 11 p. 24

157 Résolution d'équation PCSI MPSI

L'ensemble S des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\dfrac{z-8}{z-3} = z$ est :

a) $S = \{2 + 2i\}$ **b)** $S = \{2 + 2i\ ;\ 2 - 2i\}$
c) $S = \{2 + 2i\ ;\ -2 + 2i\}$ **d)** $S = \varnothing$

D'après concours Techniciens supérieurs de l'aviation (2016)

158 Résolution d'équation de degré 3 PCSI MPSI

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 + (2 - 2i)z^2 + (4 - 4i)z - 8i.$$

1. Démontrer que $2i$ est une solution de l'équation $P(z) = 0$.
2. Démontrer que $P(z) = (z - 2i)(z^2 + 2z + 4)$.
3. En déduire toutes les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

D'après concours d'entrée ENSM (2017)

159 Les entiers de Gauss

Un entier de Gauss est un nombre complexe qui peut s'écrire sous la forme $a + ib$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$.

1. Donner un exemple d'entier de Gauss.
2. Démontrer que la somme de deux entiers de Gauss est un entier de Gauss.
3. Démontrer que le produit de deux entiers de Gauss est un entier de Gauss.
4. Le quotient de deux entiers de Gauss est-il un entier de Gauss ?

160 Forme algébrique d'un nombre complexe PCSI MPSI

Soit a un nombre réel. On considère les nombres complexes :

$$z_1 = (-4a + i)(a - i) - (1 + 2ai)^2 \text{ et } z_2 = \frac{2 + 2ai}{1 - i}.$$

1. Déterminer la forme algébrique de z_1. Détailler le calcul.
2. Déterminer la forme algébrique de z_2. Détailler le calcul.

D'après concours ENI-GEIPI (2018)

161 Équation bi-carrée

On considère l'équation (E) : $z^4 - z^2 - 2 = 0$.

1. On pose $Z = z^2$. Écrire (E) comme une équation en Z.
2. Résoudre cette nouvelle équation.
3. En déduire toutes les solutions de (E).

162 Calculer avec les nombres complexes (1) PCSI MPSI

1. On considère le nombre complexe $z = 3i$, alors z^4 est égal à :

a) $81i$ **b)** -81
c) $-81i$ **d)** 81

2. Les nombres réels a et b tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (2 - i)z^2 + (1 - 2i)z - i = (z - i)(z^2 + az + b)$ sont :

a) $a = -2$ et $b = 1$ **b)** $a = -2$ et $b = -1$
c) $a = 2$ et $b = 1$ **d)** $a = 2$ et $b = -1$

D'après concours AVENIR (2017)

163 Calculer avec les nombres complexes (2) PCSI MPSI

1. On note j un nombre complexe, solution de l'équation :

$$1 + z + z^2 = 0.$$

On peut affirmer que $(j + j^2 + j^3)^3$ est égal à :

a) 0 **b)** 1 **c)** j **d)** j^2

2. On note $\text{Re}(z)$ la partie réelle et $\text{Im}(z)$ la partie imaginaire d'un nombre complexe z. Si z_1 et z_2 désignent deux nombres complexes non nuls, alors $\text{Re}((z_1 + iz_2)(1 + i))$ est égale à :

a) $\text{Re}(z_1 - z_2) - \text{Im}(z_1 + z_2)$
b) $\text{Re}(z_1) - \text{Im}(z_2)$
c) $\text{Re}(z_1 - z_2)$
d) $\text{Im}(z_1) - \text{Re}(z_2)$

3. Soit p un nombre réel et (E) l'équation suivante :

$$2pz^2 + (1 - p)z + 2p = 0$$

À quel ensemble doit appartenir p pour que (E) ait deux racines complexes conjuguées distinctes ?

a) $\left[-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{5}\right]$ **b)** $\left]-\frac{1}{3}\,;\frac{1}{5}\right[$

c) $\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$ **d)** $\left]-\infty\,;-\frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{5}\,;+\infty\right[$

D'après concours AVENIR (2019)

164 Somme et produit de complexes

1. Calculer i^n en distinguant plusieurs cas selon les valeurs de l'entier naturel n.
2. En déduire selon les valeurs de n, la valeur de :

a) la somme $1 + i + i^2 + \ldots + i^n$.
b) le produit $1 \times i \times i^2 \times \ldots \times i^n$.

165 Équation avec des complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $z^2 + 2\overline{z} + 1 = 0$.

166 Nombre imaginaire pur et nombre réel PCSI MPSI

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ convenablement choisi, on note $z' = \dfrac{2\overline{z}}{\overline{z} + i}$.

z' est un nombre réel si, et seulement si :

a) z est imaginaire pur différent de i.
b) z est imaginaire pur.
c) z est réel différent de 1.
d) z est réel.

D'après concours d'entrée à l'ENAC (2018)

167 Résolution d'équation de degré 3 PCSI MPSI

Soit a un nombre réel strictement supérieur à 1.

Soit (E) et (E′) les équations d'inconnue complexe z :

$$(E) : z^2 - 4z + 4a^2 = 0 \text{ et } (E') : z^3 - 4z^2 + 4a^2z = 0.$$

1. Justifier que l'équation (E) admet deux racines complexes non réelles.
2. On note z_1 et z_2 les deux solutions de l'équation (E). Donner les expressions de z_1 et z_2 en fonction de a.
3. En déduire l'ensemble S′ des solutions de l'équation (E′).

D'après concours ENI-GEIPI (2019)

168 Équation et trigonométrie

Pour tout nombre réel $\theta \in [0 ; \pi]$, on considère l'équation :

$$z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0.$$

1. Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles l'équation admet une solution réelle.

2. Dans les autres cas, exprimer les solutions complexes en fonction de θ.

169 Racines carrées d'un nombre complexe

Dans cet exercice, nous allons nous intéresser à la notion de racine carrée d'un nombre complexe.

1. Déterminer un nombre complexe dont le carré est égal à :

a) 25 **b)** –1 **c)** –4

2. On veut déterminer un nombre complexe z dont le carré est égal à $5 + 12\mathrm{i}$.

Poser $z = a + \mathrm{i}b$ avec a et b deux réels, et résoudre l'équation $z^2 = 5 + 12\mathrm{i}$.

Coup de pouce Pour résoudre une équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$, on peut poser $X = x^2$.

170 Équation du second degré à coefficients complexes

1. Soit a, b et c trois nombres complexes.

Démontrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $az^2 + bz + c = a(z + d)^2 + e^2$ avec d et e deux nombres complexes à déterminer.

2. Application : on considère l'équation :

$$2z^2 + (2 + 6\mathrm{i})z - 2 + 3\mathrm{i} = 0.$$

a) Écrire $2z^2 + (2 + 6\mathrm{i})z - 2 + 3\mathrm{i}$ sous la forme $a(z + d)^2 + e$ avec d et e deux nombres complexes à déterminer.

b) En déduire les solutions de l'équation.

171 Formules de Viète pour un polynôme de degré 3

Démo

Soit P un polynôme de degré 3 admettant 3 racines complexes : r_1, r_2 et r_3.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on note $P(z) = a_3z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0$.

1. Montrer que la somme des racines complexes de P est égale à $-\dfrac{a_2}{a_3}$.

2. Montrer que le produit des racines complexes de P est égal à $-\dfrac{a_0}{a_3}$.

172 Calcul de sommes

Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$.

Coup de pouce On pourra dériver de deux manières différentes la fonction f définie par $f(x) = (x + 1)^n$.

173 Équation de degré 3

Problème ouvert

Existe-t-il des équations de degré 3 à coefficients réels admettant exactement trois solutions complexes distinctes et non réelles ?

174 Résolution par radicaux de l'équation de degré 3

Dans cet exercice, on cherche à résoudre une équation (E) :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \text{ avec } a, b, c \text{ trois réels.}$$

1. En posant $X = x + \dfrac{a}{3}$, montrer que résoudre (E) revient à résoudre (E′) : $X^3 + pX + q$. On donnera l'expression de p et q en fonction de a, b, c.

2. On pose $\Delta = \dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}$. On veut montrer que si $\Delta > 0$, alors une solution réelle de (E′) est

$$x_0 = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}.$$

a) On pose $X = u + v$.

Montrer que si $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \times v = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$, alors X est solution de (E′).

b) Posons $U = u^3$ et $V = v^3$.

Montrer que résoudre le système $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u \times v = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$ revient à résoudre :

$$\begin{cases} U + V = -q \\ U \times V = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$$

c) En posant $\Delta = \dfrac{27q^2 + 4p^3}{27}$ et en supposant $\Delta > 0$, déterminer un couple $(U ; V)$ solution du système (on exprimera U et V en fonction de p et q).

d) En déduire que si $\Delta > 0$, alors une solution réelle de (E′) est $x_0 = \sqrt[3]{\dfrac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}} + \sqrt[3]{\dfrac{-q - \sqrt{\Delta}}{2}}$.

175 Électronique

Sciences

En électronique, on représente parfois les « résistances » de certains composants par des nombres complexes. Par exemple, une résistance pure est représentée par le réel $Z_r = R$, tandis qu'une bobine est représentée par le complexe $Z_b = \mathrm{i}L\omega$, où L dépend de la bobine et ω du courant qu'on met dans le circuit. Lorsqu'une résistance et une bobine sont montées en parallèle, on peut les remplacer par un composant unique associé au complexe Z_e tel que :

$$\frac{1}{Z_e} = \frac{1}{Z_b} + \frac{1}{Z_r}.$$

Démontrer que $Z_e = \dfrac{R \times \left(1 + \dfrac{R}{L\omega}\mathrm{i}\right)}{1 + \left(\dfrac{R}{L\omega}\right)^2}$.

TICE 40 min Calculer

1 Utilisation d'un logiciel de calcul formel

L'objectif de ce TP est d'apprendre à utiliser un logiciel de calcul formel afin de réaliser des calculs utilisant des nombres complexes.

A ▸ Calculs algébriques dans $\mathbb{C}$

1. Ouvrir le logiciel de calcul formel Xcas sur l'ordinateur. Dans toute la suite du TP, pour obtenir la syntaxe ou un exemple d'utilisation d'une fonction sur Xcas, on peut taper le nom de la fonction, puis appuyer sur F1.

2. On considère le nombre complexe $z = 5 + 3\mathrm{i}$.

a) Donner la partie réelle et la partie imaginaire de z.

b) En utilisant les fonctions « re » et « im » retrouver les résultats de la question **a)** sur Xcas.

3. a) Déterminer la forme algébrique de $(5 + 3\mathrm{i}) \times (2 + \mathrm{i})$ et $\dfrac{5+3\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}}$.

b) En utilisant la fonction « simplifier » retrouver les résultats de la question **a)** sur Xcas.

4. a) Déterminer la forme algébrique de $(5 + 3\mathrm{i})^2$.

b) En utilisant la fonction « developper » retrouver les résultats de la question **a)** sur Xcas.

5. a) Déterminer le nombre complexe conjugué de $z = 5 + 3\mathrm{i}$.

b) En utilisant la fonction « conj » retrouver les résultats de la question **a)** sur Xcas.

1	`re(3+2i)`
	3
2	`im(3+2i)`
	2
3	`simplifier((3+2i)/(4+3i))`
	$\frac{18}{25}+\frac{-i}{25}$
4	`developper((3+2i)^2)`
	5+12*i
5	`conj(3+2i)`
	3-2*i
6	`resoudre_dans_C(z*i=2+i,z)`
	1-2*i
7	`factoriser(z^3-6x^2+11z-6)`
	(z-3)*(z-2)*(z-i)

Exemples d'utilisations de fonctions sur Xcas

B ▸ Résolution d'équations

Pour résoudre des équations avec Xcas, il existe deux fonctions :

– resoudre : cette fonction permet de résoudre des équations dans $\mathbb{R}$;

– resoudre_dans_C : cette fonction permet de résoudre des équations dans $\mathbb{C}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes. On donnera le résultat sous forme algébrique.

a) $z + 2\mathrm{i} = 3 - \mathrm{i}$

b) $z + 2\overline{z} = 3 - \mathrm{i}$

2. Vérifier les solutions trouvées dans la question **1.** en utilisant le logiciel Xcas.

3. En utilisant Xcas, résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

a) $z^2 + 2z + 4 = 0$

b) $z^2 + 4z + 2 = 0$

C ▸ Factorisations et équations

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $P(z) = z^4 + \frac{17}{2}z^3 + \frac{9}{2}z^2 + \frac{7}{2}z - 4$.

On cherche à résoudre l'équation $P(z) = 0$.

a) En utilisant la fonction « factoriser » dans Xcas, déterminer une factorisation dans $\mathbb{R}$ de $P(z)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $P(z) = 0$.

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

2. a) En utilisant la fonction « factoriser » dans Xcas, déterminer une factorisation dans $\mathbb{R}$ de $z^6 - 1$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^6 - 1 = 0$.

TICE 20 min **Raisonner** **Calculer**

2 Algorithmes et équations du second degré

Soit f une fonction polynôme de degré 2 de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

1. Compléter le programme suivant en **Python**, afin qu'il détermine les racines réelles éventuelles de f.

PYTHON Programme lienmini.fr/maths-e01-10

```
def f(a,b,c):
    d=...
    if ... :
        print(" pas de solution réelle ")
    else :
        if ... :
            x=...
            print(" La racine est ", x)
        else :
            x1=...
            x2=...
            print(" Les deux racines sont ", x1, x2)
```

2. Écrire ce programme dans votre calculatrice ou dans un logiciel et le tester avec les fonctions suivantes.

a) $f(x) = x^2 - 2x + 10$ **b)** $f(x) = x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = x^2 + x - 2$

3. Vérifier par le calcul.

4. Modifier ce programme, afin qu'il détermine également les racines complexes éventuelles de f.

Remarque Pour utiliser les nombres complexes sur **Python**, il faut utiliser la bibliothèque `cmath`.

De plus, pour exprimer i en **Python**, il faut utiliser 1j. Par exemple : 5 + 2i s'écrira 5+2*1*j*.

5. Reprendre les questions **2.** et **3.**.

TICE 20 min **Chercher** **Calculer**

3 Suites croisées de nombres complexes

On considère les suites (u_n) et (v_n) de nombres complexes définies par $u_0 = 1 + 2\mathrm{i}$; $v_0 = 2 + \mathrm{i}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + \mathrm{i}v_n \\ v_{n+1} = v_n + \mathrm{i}u_n \end{cases}$$

1. Déterminer la forme algébrique de u_1 et v_1.

2. On note $u_n = a_n + \mathrm{i}b_n$ et $v_n = c_n + \mathrm{i}d_n$ avec a_n, b_n, c_n et d_n des nombres réels.

a) Donner les valeurs de a_0 ; b_0 ; c_0 et d_0.

b) Déterminer l'expression de a_{n+1}, de b_{n+1}, de c_{n+1} et de d_{n+1} en fonction a_n, b_n, c_n et d_n.

3. On souhaite déterminer la forme algébrique de u_{100} et de v_{100}.

a) Recopier le tableau ci-dessous dans un tableur.

	A	B	C	D	E
1	n	a_n	b_n	c_n	d_n
2	0				
3	1				
4	2				

b) Compléter la colonne A pour qu'elle contienne tous les entiers de 1 à 100.

c) Compléter les cellules B2, C2, D2 et E2.

d) Quelle formule faut-il rentrer dans la cellule B3 ? dans la cellule C3 ? dans la cellule D3 ? et dans la cellule E3 ?

e) En étirant vers le bas, compléter les colonnes B,C,D et E.

f) En déduire la forme algébrique de u_{100} et v_{100}.