

Les Matrices

1 Étudier des séries statistiques

On a consigné les résultats de trois élèves à une série d'épreuves, ainsi que les coefficients de chaque épreuve dans deux tableaux distincts.

	Épreuve 1	Épreuve 2	Épreuve 3
Camille	12	14	10
Antoine	13	10	12
Ana	16	9	13

	Épreuve 1	Épreuve 2	Épreuve 3
Coeff.	4	8	2

1. Calculer la moyenne de chaque élève sur l'ensemble des épreuves.
2. Quel élève a le mieux réussi la série d'épreuves ?

2 Manipuler des suites arithmétiques et géométriques

Soit les suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n - 2 \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et } \begin{cases} v_1 = -2 \\ v_{n+1} = \frac{v_n}{3} \end{cases} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

1. Déterminer les trois premiers termes de chaque suite.
2. Déterminer la nature des suites (u_n) et (v_n) et préciser leurs raisons.
3. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n .

Pour prendre
un bon départ

3 Résoudre des systèmes

Résoudre les systèmes suivants.

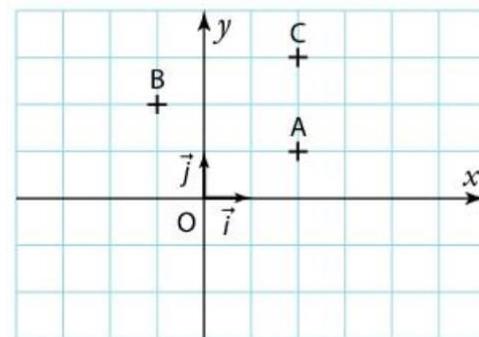
$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 14 \\ 4x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -3x - 4y = -14 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -3x + 7y = 52 \\ 9x - 8y = -65 \end{cases}$$

4 Réaliser des transformations géométriques

1. Reproduire le repère ci-contre.
2. Relever les coordonnées des points A, B et C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Tracer le point A', image de A par la translation de vecteur \vec{BC} .
4. Tracer le point B', image de B par la symétrie de centre A.
5. Tracer le point C', image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
6. Relever graphiquement les coordonnées des points A', B' et C' dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Pour prendre un bon départ

3 Résoudre des systèmes

Résoudre les systèmes suivants.

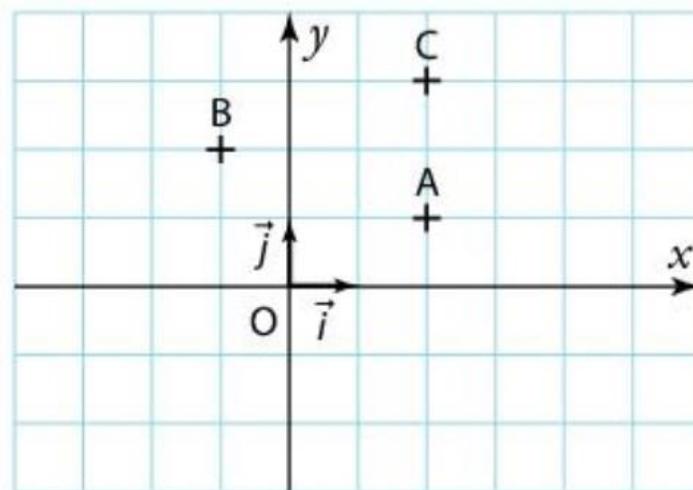
$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y = 14 \\ 4x - 3y = 8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ -3x - 4y = -14 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -3x + 7y = 52 \\ 9x - 8y = -65 \end{cases}$$

4 Réaliser des transformations géométriques

1. Reproduire le repère ci-contre.
2. Relever les coordonnées des points A, B et C dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
3. Tracer le point A', image de A par la translation de vecteur \vec{BC} .
4. Tracer le point B', image de B par la symétrie de centre A.
5. Tracer le point C', image de C par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
6. Relever graphiquement les coordonnées des points A', B' et C' dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Découvrir le calcul matriciel (Magnard – Sésamath page 164)

Une entreprise qui vend des fruits peut se fournir auprès de cinq marchés différents. Les tableaux ci-dessous détaillent les prix proposés par chacun des marchés (les prix sont au kg) ainsi que les commandes reçues de trois clients.



Nantes	
Orange	1,15 €
Citron	1,25 €
Pomme	0,65 €
Banane	1,2 €

Rungis	
Orange	1,2 €
Citron	1,4 €
Pomme	1 €
Banane	1 €

Lyon	
Orange	1,05 €
Citron	1,2 €
Pomme	0,95 €
Banane	1,15 €

Marseille	
Orange	1,05 €
Citron	1,3 €
Pomme	0,85 €
Banane	1,05 €

Lille	
Orange	1,15 €
Citron	1,6 €
Pomme	0,55 €
Banane	1,15 €

Client 1	
Orange	30 kg
Citron	30 kg
Pomme	70 kg
Banane	60 kg

Client 2	
Orange	50 kg
Citron	50 kg
Pomme	60 kg
Banane	50 kg

Client 3	
Orange	60 kg
Citron	10 kg
Pomme	70 kg
Banane	40 kg

A ► Représenter les matrices

1. Organiser les données des prix par marché sous la forme d'un tableau à double entrées.

Combien y-a-t-il de dispositions possibles pour ce type de tableau en gardant l'ordre de l'énoncé ?

En ne gardant que les valeurs de ce tableau, on obtient une matrice que l'on nommera P .

La matrice obtenue à partir de l'autre tableau est la matrice transposée de P , notée P^t .

2. Donner la matrice C représentant les commandes des trois clients (mettre les clients en colonne et dans l'ordre).

B ► Opérations

Pour la suite, on considérera la matrice $P = \begin{pmatrix} 1,15 & 1,25 & 0,65 & 1,2 \\ 1,2 & 1,4 & 1 & 1 \\ 1,05 & 1,2 & 0,95 & 1,15 \\ 1,05 & 1,3 & 0,85 & 1,05 \\ 1,15 & 1,6 & 0,55 & 1,15 \end{pmatrix}$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 10 & 10 & 10 \\ 0 & 20 & 10 \\ 10 & 0 & 10 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix}$.

1. Les clients ont chacun passé une nouvelle commande, consignée dans la matrice A .

a) Écrire la matrice C' représentant la commande totale par clients (clients en colonne).

Nous venons de faire une somme de matrices : $C + A = C'$.

b) Quelle règle peut-on établir pour la somme de deux matrices ?

2. P représente en réalité les prix de l'année précédente. Cette année les prix ont tous augmenté de 5 %

a) Écrire la matrice P' représentant les nouveaux prix des produits par marché.

Nous venons de faire une multiplication de matrice par un nombre : $1,05 \times P = P'$.

b) Quelle règle peut-on établir pour le produit d'une matrice par un nombre réel ?

3. On souhaite savoir quel marché serait le plus économique.

a) Quel est le coût total pour l'entreprise si elle choisit le marché de Nantes pour satisfaire la commande du client 1 ? Et avec celui de Rungis ?

b) Écrire la matrice T représentant le coût total pour satisfaire la demande par marché et par client (écrire les clients en colonne). Nous venons de faire une multiplication de matrices : $P'C' = T$.

c) Quelle règle peut-on établir pour la multiplication de deux matrices ?

d) Quel marché peut-on conseiller à l'entreprise pour satisfaire la commande du client 1 ? Du client 2 ? Du client 3 ? Et si on prenait le même marché pour les 3 clients ?

Exemple

Soit $A = (a_{ij})$ la matrice de taille 2×3 égale à $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$.

Le coefficient a_{12} vaut 7.

Le coefficient a_{21} vaut 3.

Définition - Matrice ligne, matrice colonne, matrice carrée

- Une matrice de taille $1 \times n$ est appelée **matrice ligne** de taille n .
- Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée **matrice colonne** de taille n .
- Une matrice de taille $n \times n$ est appelée **matrice carrée d'ordre n** .

Exemple

$$A = (4 \quad -2 \quad 1), B = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

sont respectivement une matrice ligne de taille 3, une matrice colonne de taille 2

et une matrice carrée d'ordre 2.

Définition - Matrices égales

Deux matrices $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ sont **égales** si elles ont la même taille $m \times n$ et si, pour tout couple $(i; j)$ tel que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$, on a $a_{ij} = b_{ij}$.

Définition - Matrice diagonale

Une **matrice diagonale** (a_{ij}) est une matrice carrée dont les coefficients à l'extérieur de la **diagonale principale** sont nuls, c'est-à-dire tels que $a_{ij} = 0$ pour $i \neq j$.

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}$$

Remarque

Une matrice diagonale se note aussi $\text{diag}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n)$.

Dans une matrice diagonale, un ou plusieurs coefficients a_i peuvent être nuls.

Définition - Matrice identité

La matrice identité d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n , notée I_n ,
dont la diagonale principale ne contient que des 1.

Exemple

L'identité d'ordre 3 est $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On peut aussi la noter $\text{diag}(1,1,1)$.

S'il n'y a pas d'ambiguïté, on note l'identité I sans préciser son ordre en indice.

Définition - Matrice transposée

La matrice transposée d'une matrice A de taille $m \times n$ est la matrice notée A^T , de taille $n \times m$,
obtenue en échangeant les lignes et les colonnes de A .

Exemple

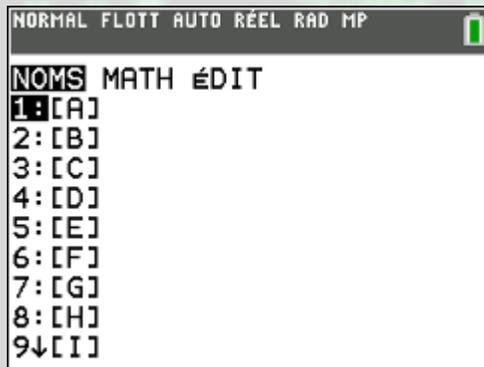
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} ; (0,3 \quad 0,7)^T = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} ; (0,3 \quad 0,7)^T = \begin{pmatrix} 0,3 \\ 0,7 \end{pmatrix}$$

Avec la calculatrice TI 83 CE

Appuyer sur matrice



Exercices

12 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 4.
Écrire la matrice A dans chacun des cas suivants :

1) $a_{ij} = i + j$

3) $a_{ij} = i^3 + 3j$

2) $a_{ij} = 2i - j$

4) $a_{ij} = |i - 2j|$

13 Soit $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 5.
Écrire la matrice B dans chacun des cas suivants :

1) $b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ i + 1 & \text{si } i < j \\ j - 2 & \text{si } i > j \end{cases}$

2) $b_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 3 & \text{si } i < j \\ -2 & \text{si } i > j \end{cases}$

16 Soit l'algorithme suivant :

1. n, i, j sont des entiers
2. A est une matrice carrée de taille n
3. *Traitement*
4. Saisir n et A
5. Pour i allant de 1 à n
6. Pour j allant de 1 à n
7. Si $i+j=n+1$ alors $a_{ij}=1$ sinon $a_{ij}=0$
8. Fin Pour
9. Fin Pour

- 1) Faire tourner l'algorithme pour $n = 4$.
- 2) Quel type de matrice l'algorithme fabrique-t-il ?
- 3) Modifier l'algorithme pour qu'il fabrique l'identité.

Exercices corrigés

12 Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 4.
Écrire la matrice A dans chacun des cas suivants :

1) $a_{ij} = i + j$

3) $a_{ij} = i^3 + 3j$

2) $a_{ij} = 2i - j$

4) $a_{ij} = |i - 2j|$

$$1. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 10 & 13 \\ 11 & 14 & 17 & 20 \\ 30 & 33 & 36 & 39 \\ 67 & 70 & 73 & 77 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

13 Soit $B = (b_{ij})$ une matrice carrée d'ordre 5.

Écrire la matrice B dans chacun des cas suivants :

$$1) b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ i + 1 & \text{si } i < j \\ j - 2 & \text{si } i > j \end{cases} \quad 2) b_{ij} = \begin{cases} i & \text{si } i = j \\ 3 & \text{si } i < j \\ -2 & \text{si } i > j \end{cases}$$

$$1. B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2. B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 3 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Exercices corrigés

16 Soit l'algorithme suivant :

1. `n, i, j` sont des entiers
2. `A` est une matrice carrée de taille `n`
3. *Traitement*
4. Saisir `n` et `A`
5. Pour `i` allant de 1 à `n`
6. Pour `j` allant de 1 à `n`
7. Si `i+j=n+1` alors `aij=1` sinon `aij=0`
8. Fin Pour
9. Fin Pour

- 1) Faire tourner l'algorithme pour $n = 4$.
- 2) Quel type de matrice l'algorithme fabrique-t-il ?
- 3) Modifier l'algorithme pour qu'il fabrique l'identité.

$$1. \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. une matrice diagonale

3. Changer la boucle si par : Si $i = j$ alors $a_{ij} = 1$ sinon $a_{ij} = 0$

Exercices

17 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 8 & 7 \\ \dots & 9 & \dots & 1 \\ 7 & \dots & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On sait que $a_{32} = 5$, $a_{23} = -4$, $a_{21} = 8$ et $a_{12} = 11$.

Compléter A et écrire A^T , la transposée de A .

19 Une matrice carrée A est dite **symétrique** si $M = M^T$ et **antisymétrique** si $M = -M^T$.

1) Soit $K = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $X = K + K^T$ et $Y = 2K - X$.

a) Montrer que X est symétrique, Y antisymétrique.

b) Qu'ont en commun les trois matrices K , X et Y ?

2) Soit S , A et Q trois matrices carrées d'ordre 3 respectivement symétrique, antisymétrique et quelconque.

Montrer que :

a) Les éléments diagonaux de A sont nuls.

b) $Q + Q^T$ est symétrique ; $Q - Q^T$ antisymétrique.

c) S^n est symétrique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercices corrigés

17 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & \dots & 8 & 7 \\ \dots & 9 & \dots & 1 \\ 7 & \dots & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

On sait que $a_{32} = 5$, $a_{23} = -4$, $a_{21} = 8$ et $a_{12} = 11$.

Compléter A et écrire A^T , la transposée de A .

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 11 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & -4 & 1 \\ 7 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 7 \\ 11 & 9 & 5 \\ 8 & -4 & 0 \\ 7 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Exercices corrigés

19 Une matrice carrée A est dite **symétrique** si $M = M^T$ et **antisymétrique** si $M = -M^T$.

1) Soit $K = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $X = K + K^T$ et $Y = 2K - X$.

- a) Montrer que X est symétrique, Y antisymétrique.
- b) Qu'ont en commun les trois matrices K , X et Y ?

1. (a) $X = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 10 \\ 8 & 10 & 12 \\ 10 & 12 & 8 \end{pmatrix}$ et $X = X^T$, $Y = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 6 \\ 6 & 0 & -6 \\ -6 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ et $Y = -Y^T$

(b) $X = K + K^T$ et $Y = K - K^T$ c'est-à-dire que X et Y s'expriment en fonction de K et de K^T .

Exercices corrigés

2) Soit S , A et Q trois matrices carrées d'ordre 3 respectivement symétrique, antisymétrique et quelconque. Montrer que :

- a) Les éléments diagonaux de A sont nuls.
- b) $Q + Q^T$ est symétrique ; $Q - Q^T$ antisymétrique.
- c) S^n est symétrique pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$2. \quad (a) \quad A = -A^T \text{ donc } \begin{cases} a_{11} = -a_{11} \\ a_{22} = -a_{22} \\ a_{33} = -a_{33} \end{cases} \text{ D'où : } a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$$

$$(b) \quad Q + Q^T = \begin{pmatrix} 2q_{11} & q_{12} + q_{21} & q_{13} + q_{31} \\ q_{12} + q_{21} & 2q_{22} & q_{23} + q_{32} \\ q_{13} + q_{31} & q_{32} + q_{23} & 2q_{33} \end{pmatrix} \text{ donc } Q + Q^T \text{ est symétrique}$$

$$Q - Q^T = \begin{pmatrix} 0 & q_{12} - q_{21} & q_{13} - q_{31} \\ q_{21} - q_{12} & 0 & q_{23} - q_{32} \\ q_{31} - q_{13} & q_{32} - q_{23} & 0 \end{pmatrix} \text{ donc } Q - Q^T \text{ est antisymétrique}$$

II - Opérations sur les matrices

1. Somme de deux matrices

Définition – Somme de deux matrices

Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de même taille $m \times n$.

La somme des matrices A et B est la matrice notée $A + B$ définie par :

$A + B = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ pour tout couple $(i; j)$ tel que $1 \leq i \leq m$ et $1 \leq j \leq n$.

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}. \quad A + B = \begin{pmatrix} -3 + 2 & 5 - 5 \\ -1 + 4 & 3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Propriété

Soit A, B, C trois matrices de même taille.

$$A + B = B + A \text{ (commutativité)}$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \text{ (associativité)}$$

Définition - Différence de deux matrices

Soit A et B deux matrices de même taille.

La différence des matrices A et B est la matrice notée $A - B$

égale à la somme $A + (-B)$ où $-B$ est la matrice opposée de B

dont les coefficients sont les opposés des coefficients de B .

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A - B = A + (-B) = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 - 2 & 5 + 5 \\ -1 - 4 & 3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 10 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Produit d'une matrice par un réel

Définition - Produit d'une matrice par un réel

Soit A une matrice et k un nombre réel.

Le **produit** de A par le réel k est la matrice notée kA dont les coefficients sont obtenus en multipliant tous les coefficients de A par k .

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3,5 & -5 & 2,5 \\ -1 & 0,5 & -5,5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors, } -2A = \begin{pmatrix} -2 \times 3,5 & -2 \times (-5) & -2 \times 2,5 \\ -2 \times (-1) & -2 \times 0,5 & -2 \times (-5,5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 10 & -5 \\ 2 & -1 & 11 \end{pmatrix}.$$

Propriété

Soit A et B deux matrices de même taille et deux réels k et k' .

- $0A = 0$ et $1A = A$
- $k(A + B) = kA + kB$
- $(k + k')A = kA + k'A$
- $(kk')A = k(k'A)$

Remarque

Dans l'égalité $0A = 0$, le 0 de gauche est un réel mais celui de droite désigne la **matrice nulle**, matrice ayant la même taille que A et dont tous les coefficients sont nuls.

EXERCICES

21 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -8 & 5 \\ 6 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 2 & -4 & -7 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer :

- 1) $A + B$ 2) $3A$ 3) $-5B$ 4) $2A - 3B$

24 Déterminer les réels x et y tels que :

$$x \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 & -23 \\ 16 & -7 \end{pmatrix}$$

25 Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 1 \\ 0 & 7 & 11 \\ a & b & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 15 & c & d \\ e & 35 & f \\ 6 & 5 & g \end{pmatrix}$.

Déterminer les réels a, b, c, d, e, f, g et k tels que $A = kB$.

3. Produit de deux matrices

Définition - Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Le produit de la matrice ligne $A = (a_1 \ \cdots \ a_n)$ par la matrice colonne $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ est noté AB et est égal au réel :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

Exemple

Soit $A = (3 \ 0 \ -2)$ et $B = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$. $AB = 3 \times (-1) + 0 \times (-4) - 2 \times (-2) = 1$.

Définition - Produit de deux matrices

Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $n \times p$.

Le produit de A par B , noté AB ,

est la matrice $C = (c_{ij})$ de taille $m \times p$ telle que

c_{ij} est égal au produit de la i -ième ligne de A par la j -ième colonne de B

Remarque

- Le produit d'une matrice A par une matrice B n'existe qu'à condition que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B .
- Si le produit d'une matrice A par une matrice B existe, en général, il n'est pas commutatif.

En premier lieu, BA n'existe pas toujours (il n'existe que si A et B sont des matrices carrées) et, même si c'est le cas, généralement on n'a pas $AB = BA$.

MÉTHODE 1 – Multiplier deux matrices

Pour calculer la matrice C égale à AB , on vérifie que le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B , puis on dispose les matrices suivant le schéma

	B
A	C

de sorte que c_{ij} soit à l'intersection du prolongement de la i -ème ligne de A et de la j -ième colonne de B .

Exercice d'application : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -2 \\ -2 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer AB .

Remarque

Il n'est pas nécessaire que l'une des matrices A ou B soit nulle pour que $AB = 0$.

Exemple

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Alors, $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Propriétés

Soit A , B et C trois matrices compatibles avec les produits écrits ci-après et soit k un réel.

- $(AB)C = A(BC) = ABC$ (associativité)
- $A(B + C) = AB + AC$ et $(A + B)C = AC + BC$ (distributivité)
- $(kA)B = A(kB) = k(AB)$
- $AI = IA = A$ et $A0 = 0A = 0$

Exercices

29 Soit A une matrice de taille $m \times n$ et B une matrice de taille $p \times q$.

Déterminer à quelle condition chacun des produits suivants existe et donner sa taille si c'est le cas.

- 1) AB 2) BA 3) $BABA$ 4) A^3

33 Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer AB et BA .
- 2) Que peut-on dire des matrices A et B ?

31 Soit les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.
Vérifier que $AB = 0$, puis calculer BA .

32 Dans chaque cas, montrer que le produit des matrices A et B est commutatif.

1) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

2) $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

3) $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4) $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

4. Puissance d'une matrice carrée

Définition

Soit A une matrice carrée et n un entier naturel.

La puissance n -ième de A est la matrice notée A^n égale :

- au produit de n facteurs A si $n \neq 0$;
- à la matrice identité I de même ordre que celui de A si $n = 0$

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors, } A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

On peut démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.

MÉTHODE 2 - Effectuer un calcul matriciel avec la calculatrice

Exercice d'application :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 2AB + B^2$.

Avec une calculatrice TI

- Entrer dans le mode "Matrice" puis le menu "EDIT".
- Saisir la taille de la matrice A puis ses coefficients. Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche "(-)". Faire de même pour B .
- Quitter le mode "Matrice" puis y entrer à nouveau et, dans le menu "NOMS", sélectionner la matrice . Compléter la formule et taper "Entrer".

Exercices page 182 et 183 (Magnard – Maths Expertes)

43 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$. Effectuer les calculs

suivants.

- a) AB b) A^2 c) A^5 d) B^2 e) B^5

44 Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que :

a) $A^2 = A$

b) $A^2 = I_2$

c) $AB = BA$ où $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

45 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Effectuer les calculs suivants.

- a) $A + B$ b) A^2 c) B^2 d) AB e) BA .

46 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2, A^3, B^2 et B^3 . Que remarque-t-on ?
2. Que peut-on conjecturer pour les puissances de ces deux matrices ?

47 On considère les matrices $U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $V = I_3 - U$.

Effectuer les calculs suivants.

- a) U^2 b) V^2 c) UV d) VU .

III. Matrices inversibles

1. Inverse d'une matrice carrée

Définition – Inverse d'une matrice carrée

Une matrice carrée A d'ordre n est **inversible** s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$AB = BA = I$$

La matrice B , notée A^{-1} , est appelée la **matrice inverse** de A .

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ donc } B \text{ est l'inverse de } A.$$

Propriété

Si une matrice est inversible, alors son inverse est unique.

Preuve

Soit A une matrice inversible ayant deux inverses B et C .

On a $B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C$. Ainsi, $B = C$. Donc, l'inverse de A est unique.

Propriété

Si $AB = I$, alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Il suffit donc seulement de vérifier l'une des égalités $AB = I$ ou $BA = I$ pour montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exemple

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 5 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Alors, } AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Donc A et B sont inverses l'une de l'autre et on a les égalités $A^{-1} = B$ et $B^{-1} = A$.

2. Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

Définition – Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2

Le déterminant de la matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est le réel noté $\det(M)$ ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ égal à $ad - bc$.

Théorème – Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

- La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.
- Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Théorème – Inverse d'une matrice carrée d'ordre 2

- La matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.
- Si A est inversible, alors $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Preuve :

Soit $N = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Alors, $MN = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}$.

- Si $ad - bc \neq 0$, alors $\frac{1}{ad-bc} MN = I \Leftrightarrow M \left(\frac{1}{ad-bc} N \right) = I$.

Donc M est inversible et son inverse est $\frac{1}{ad-bc} N = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

- Si $ad - bc = 0$, alors $MN = 0$. Supposons alors que M soit inversible, d'inverse P .

Alors, on aurait $PMN = IN = N$ et $PMN = P0 = 0$ et donc $N = 0$, ce qui est absurde.

Remarque

- Toute matrice carrée admet un déterminant et un seul, mais pour un ordre strictement supérieur à 2, il n'existe pas de formule simple pour le calculer et on utilisera une calculatrice ou un logiciel de calcul formel.
- Le déterminant non nul est un critère d'inversibilité d'une matrice carrée de tout ordre.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \quad \text{Alors, } \det(A) = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \times 6 - 2 \times 8 = 18 - 16 = 2 \neq 0.$$

$$\text{Ainsi, } A \text{ est inversible et } A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & -8 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 1,5 \end{pmatrix}.$$

Exercices page 183 (Magnard – Maths Expertes)

48 Dans chaque cas, déterminer si A est inversible et préciser A^{-1} le cas échéant.

a) $A = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} -0,5 & 4 \\ 0,25 & 2 \end{pmatrix}$

49 Calculer :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Que peut-on en déduire sur ces deux matrices ?

50 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Supposons qu'il existe une matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $AB = I_2$.

1. Effectuer le calcul AB .
2. Que peut-on en déduire quant à l'existence de B ?
3. La matrice A est-elle inversible ?

51 Montrer que les matrices suivantes sont inversibles et donner leurs matrices inverses.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

52 On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Effectuer les calculs AB et AC .
2. Pourquoi peut-on en déduire que la matrice A n'est pas inversible ?

53 On considère la matrice $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer les puissances de N . N est-elle inversible ?

Exercices page 183 (Magnard – Maths Expertes)

54 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $6A - A^2$. En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inversible.

55 Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$. Calculer $12A - A^2$.

En déduire que la matrice A est inversible et donner sa matrice inversible.

56 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$ et en déduire que A est inversible. Donner alors A^{-1} .

57 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 - 2I_3 - 3A$ et en déduire que A est inversible. Donner alors A^{-1} .

58 À l'aide de la calculatrice, déterminer si A est inversible et préciser A^{-1} le cas échéant.



a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

IV. Résolution d'un système linéaire

Propriété – Écriture matricielle d'un système

Le système linéaire $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ a pour écriture matricielle $\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix}$.

Preuve :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} ax + by \\ a'x + b'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ c' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

Remarque : Cette propriété se généralise à un système de dimension quelconque.

Exemple : $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \end{pmatrix}$ correspond au système $\begin{cases} 2x - 3y + z = 7 \\ 3x - 2y - z = -5 \end{cases}$.

Propriété

Soit A une matrice carrée inversible d'ordre n et B une matrice colonne de taille n .
Alors, le système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution :
le n -uplet correspondant à la matrice colonne $A^{-1}B$.

Preuve :

Soit un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ où A est inversible.

Alors, on a : $AX = B$

$$\Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow IX = A^{-1}B$$

$$\Leftrightarrow X = A^{-1}B.$$

MÉTHODE 3 – Résoudre un système de deux équations à deux inconnues

Exercice d'application :

$$\text{Résoudre le système linéaire } \begin{cases} 2x + 5y = 8 \\ 3x - 4y = 15 \end{cases}$$

Remarque

Un système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ où A n'est pas inversible a soit une infinité de solutions, soit aucune.

Exemple :

$$\text{Le système } \begin{cases} 3x + 6y = a \\ 4x + 8y = b \end{cases} \text{ s'écrit matriciellement } AX = B \text{ où } A = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Or, $\det(A) = 0$ donc A n'est pas inversible.

Dans le système, multiplions l'équation du haut par 4 et celle du bas par 3. On obtient :

$$\begin{cases} 12x + 24y = 4a \\ 12x + 24y = 3b \end{cases} \text{ ce qui entraîne que } 4a = 3b \text{ toujours vrai, ou jamais.}$$

Exercices page 184 (Magnard – Maths Expertes)

59 Traduire les systèmes ci-dessous sous forme matricielle.

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - 3y = 2 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + 1 = 3 \\ 3x - 6y - z + 2 = 2 \\ 3z + 4 - x + 2y = 1 \end{cases}$$

60 Résoudre les systèmes suivants en utilisant le calcul matriciel.

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 3 \\ z - x - y = -9 \\ 2y - x - z = 12 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 2x - 5y - 2z = 2 \\ z - x + 4y = -1 \end{cases}$$

61 Dans chaque cas, déterminer une matrice X de dimension 2×1 telle que $AX + B = X$.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix} \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 20 \\ 8 \end{pmatrix}$$

MÉTHODE 4 – Résoudre un système linéaire avec la calculatrice

- On passe à l'écriture matricielle du système : $AX = B$.
- On vérifie que le déterminant de A est non nul, pour vérifier l'inversibilité de A .
- On détermine alors A^{-1} , puis le produit $A^{-1}B$ pour obtenir la solution.

Exercice d'application : Résoudre le système linéaire
$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z & = & -1 \\ x + y - 5z & = & 2 \\ -4x + 3y & = & 6 \end{cases}$$

Avec une calculatrice TI

- Entrer dans le mode MATRICE puis dans le menu MATH et choisir la commande $dét($.
Saisir la matrice en utilisant les crochets "[" (touches $\boxed{2nde} \boxed{\times}$) et "]" (touches $\boxed{2nde} \boxed{-}$). Pour les coefficients négatifs, utiliser la touche $\boxed{(-)}$.
- Faire "précéd" (touches $\boxed{2nde} \boxed{entrer}$) pour revenir dans l'instruction précédente.
Supprimer $dét($ et la parenthèse finale.
À la suite, appuyer sur la touche $\boxed{x^{-1}}$, saisir la matrice colonne B et appuyer sur "entrer".