

Probabilités conditionnelles et indépendance

I. Rappels

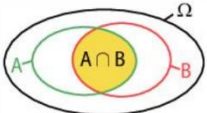
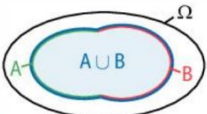
Une expérience aléatoire est

Définition – Évènement et évènement contraire

- Dans une expérience aléatoire, chacun des résultats possibles est appelé « » et l'ensemble constitué par toutes lesest appelé « », noté
- Un « » est un ensemble d'issues et on considère également qu'une issue est un (dit « »)
- Si A est un évènement, on note \bar{A} l'évènement «» de A : c'est l'évènement constitué par toutes les issues qui

En probabilités, on utilise des notations qui permettent d'être plus concis.

Définition - Union et intersection de deux évènements

<ul style="list-style-type: none"> • On note $A \cap B$ l'évènement constitué des issues qui sont <div style="text-align: center;">  </div>	<ul style="list-style-type: none"> • On note $A \cup B$ l'évènement constitué des issues qui sont dans <div style="text-align: center;">  </div>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Définition - Notion de probabilité

Une probabilité P sur Ω est une fonction qui, à tout évènement, associe un nombre de l'intervalle et qui vérifie :

-
- pour tous évènements **incompatibles** A et B , c'est-à-dire tels que
....., $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$

On donne deux conséquences immédiates et très utiles de cette définition.

Proposition 1 - Conséquences de la définition d'une probabilité (Dém exo 29 page 300)

- Pour tout évènement A , on a $P(\bar{A}) = \dots\dots\dots$
- Si A et B sont deux évènements incompatibles, alors $P(A \cup B) = \dots\dots\dots$

Le deuxième point de la définition d'une probabilité se généralise.

Proposition 2 - Formule du crible pour deux évènements (Dém page 300)

Pour tous évènements A et B , on a $P(A \cup B) + P(A \cap B) = \dots\dots\dots$

On est souvent amené à travailler dans le cas particulier suivant, par exemple dans une expérience de tirage unique où les éléments à choisir sont indistinguables.

Définition - Équiprobabilité

On dit que les issues de Ω sont équiprobables si elles ont

Alors, pour toute issue ω , $P(\omega) = \dots$ et pour tout événement A composé de k issues, $P(A) = \dots$

II. Conditionnement et indépendance

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

A. Probabilité de B sachant A

Définition

A et B sont deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par :

$$P_A(B) = \dots$$

Remarque : si $P(B) \neq 0$, on définit de même la probabilité de l'événement A sachant B par $P_B(A) = \dots$

Exemple

Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30 % des cas à une panne A, dans 40 % des cas à une panne B et dans 3 % des cas à la simultanéité des deux pannes.

Un appareil choisi au hasard présente la panne A. La probabilité pour qu'il ait aussi la panne B est :

$$P_A(B) = \dots$$

B. Probabilité de $A \cap B$

Propriété

A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'intersection des événements A et B est :

$$P(A \cap B) = \dots$$

Remarque : si $P(B) \neq 0$, on a de façon analogue $P(A \cap B) = \dots$

Exemple

40 % des chiens d'un éleveur sont des labradors. Les femelles représentent 65 % des labradors et 45 % des autres chiens.

On choisit au hasard le carnet de santé de l'un des chiens de l'éleveur et on note A l'événement : « Le chien est un labrador » et B l'événement : « Le chien est une femelle ».

Ainsi $P(A) = \dots$ et $P_A(B) = \dots$

La probabilité de $A \cap B$: « Le chien est un labrador femelle » est :

$$P(A \cap B) = \dots = \dots = \dots$$

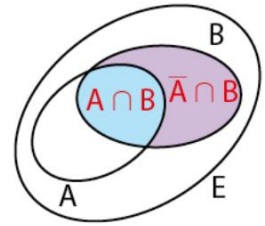
C. Indépendance de deux évènements

Définition

Dire que des évènements A et B sont **indépendants** signifie que

Propriété

Si deux évènements A et B sont indépendants, alors les évènements et le sont aussi.



Démonstration

III. Arbres pondérés

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

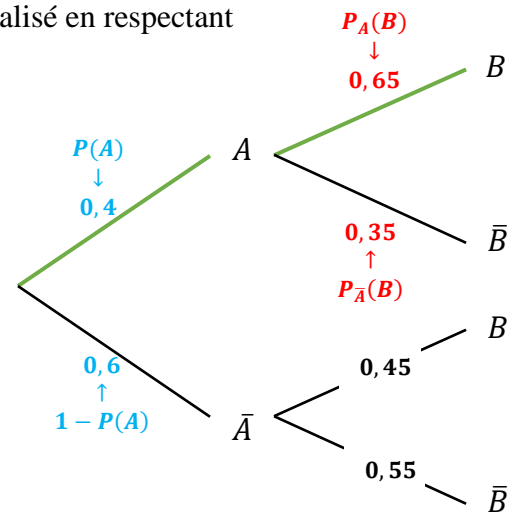
A. Arbre pondéré par des probabilités

Exemple

On reprend l'exemple du paragraphe I.B).

On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous réalisé en respectant certaines règles.

- **Règle 1** Sur les branches du niveau, on inscrit les probabilités des évènements correspondants.
- **Règle 2** Sur les branches du 2^{ème} niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.
- **Règle 3** La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.



Remarque : le produit des probabilités des évènements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces évènements.

Par exemple, pour le chemin vert, on retrouve $P(A \cap B) = \dots\dots\dots$

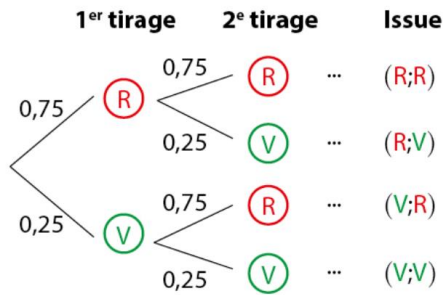
B. Succession de deux épreuves indépendantes

Vocabulaire :

Dans une succession de deux épreuves, lorsque l'issue de l'une quelconque de ces épreuves ne dépend pas des issues de l'autre épreuve, on dit que ces épreuves sont.....

Exemple

Une urne opaque contient trois boules rouges et une boule verte. On prélève, au hasard et avec remise, deux boules de cette urne et on note les couleurs obtenues.



Une succession de deux branches est appelée un Chaque conduit à une

Propriété (admise)

Dans une répétition d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est le

Exemple

L'issue (R ; V) a pour probabilité $P(R ; V) = \dots\dots\dots$

IV. Probabilités totales

Définition

Une partition de l'univers Ω est un ensemble d'évènements incompatibles deux à deux incompatibles (disjoints), et dont la réunion est Ω .

Autrement dit : Soient A_1, A_2, \dots, A_n n évènements de probabilités non nulles.

A_1, A_2, \dots, A_n forment une partition de l'univers Ω si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- Pour $i \neq j$ tels que $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq n$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ (deux à deux disjoints).
- $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = \Omega$

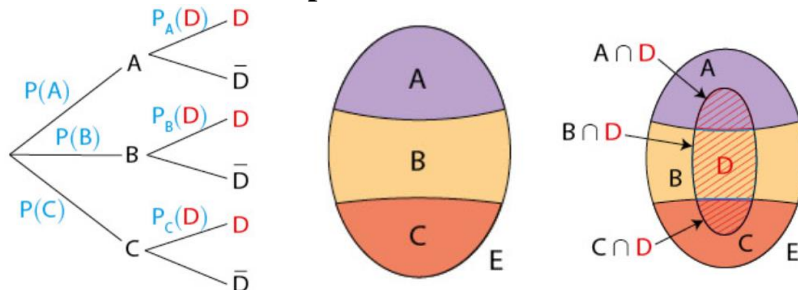
Propriété – Formule des probabilités totales (Dem à l'exo 27 page 326)

On considère A_1, A_2, \dots, A_n n évènements de probabilités non nulles formant une partition de l'univers Ω .
 Pour tout évènement B , on a :

$$P(B) = \dots\dots\dots$$

c'est à dire $P(B) = \dots\dots\dots$

Exemple avec 3 évènements A, B et C incompatibles



Ainsi $P(D) = \dots\dots\dots$

Donc $P(D) = \dots\dots\dots$

Ainsi, on peut calculer la probabilité d'un évènement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.