# Probabilités conditionnelles et indépendance

## I. Rappels

**Pour prendre un bon départ - Sésamath page 269**

## 1. Manipuler des événements

Dans son placard, Vaïdeguy a des bols et des tasses avec ou sans anse selon la répartition ci-contre.

| | Bol | Tasse | Total |
|---|---|---|---|
| Avec anse | 2 | 9 | 11 |
| Sans anse | 6 | 3 | 9 |
| Total | 8 | 12 | 20 |

Le matin, elle prend un de ces récipients au hasard pour prendre son café et on considère les événements :

- A : « Le récipient a une anse. »
- B : « Le récipient est un bol. »

**1.** Déterminer les probabilités $p(A)$ et $p(B)$.

**2.** Décrire chacun des événements $A \cap B$, $A \cup B$, $\bar{A} \cap B$, etc. par une phrase et donner sa probabilité.

**3.** Écrire l'événement « Le récipient est une tasse sans anse » à l'aide des événements A et B.

**4.** Associer chacune des phrases suivantes à la valeur qui lui correspond.

① Probabilité qu'une tasse ait une anse. ⓐ $\frac{9}{20}$

② Probabilité qu'un récipient à anse est une tasse. ⓑ $\frac{9}{11}$

③ Probabilité qu'un récipient soit une tasse à anse. ⓒ $\frac{9}{12}$

## 2. Représenter une expérience aléatoire par un arbre ou un tableau

On considère une urne contenant 3 jetons numérotés de 1 à 3.

On tire un jeton dans cette urne puis **on le remet dans l'urne** et on en tire un second : le résultat de l'expérience aléatoire est le produit des deux nombres obtenus.

**1.** Représenter cette expérience aléatoire par un arbre puis par un tableau.

**2.** Donner la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

**3.** Quelle est la probabilité que le résultat de cette expérience aléatoire soit pair ?

## 3. Manipuler des proportions de proportions

Dans une librairie, il y a 84 % de romans dont 47 % de policiers.

Quelle est la proportion de romans policiers dans cette librairie ?

## 4. Calculer une probabilité dans le cas de non-équiprobabilité

Quand il commande une pizza à emporter, Jonas a remarqué que le temps d'attente annoncé est 5, 10, 15 ou 20 minutes avec les probabilités ci-contre.

| Temps d'attente (en min) | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,3 | 0,2 | 0,1 | ? |

**1.** Déterminer la probabilité que le temps d'attente soit 20 minutes.

**2.** Quelle est la probabilité d'attendre 10 minutes ou moins ?

## 2. Représenter une expérience aléatoire par un arbre ou un tableau

On considère une urne contenant 3 jetons numérotés de 1 à 3.

On tire un jeton dans cette urne puis **on le remet dans l'urne** et on en tire un second : le résultat de l'expérience aléatoire est le produit des deux nombres obtenus.

**1.** Représenter cette expérience aléatoire par un arbre puis par un tableau.

**2.** Donner la loi de probabilité associée à cette expérience aléatoire.

**3.** Quelle est la probabilité que le résultat de cette expérience aléatoire soit pair ?

## 3. Manipuler des proportions de proportions

Dans une librairie, il y a 84 % de romans dont 47 % de policiers.

Quelle est la proportion de romans policiers dans cette librairie ?

## 4. Calculer une probabilité dans le cas de non-équiprobabilité

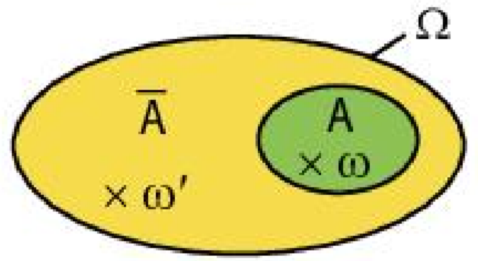
Quand il commande une pizza à emporter, Jonas a remarqué que le temps d'attente annoncé est 5, 10, 15 ou 20 minutes avec les probabilités ci-contre.

| Temps d'attente (en min) | 5 | 10 | 15 | 20 |
|---|---|---|---|---|
| Probabilité | 0,3 | 0,2 | 0,1 | ? |

**1.** Déterminer la probabilité que le temps d'attente soit 20 minutes.

**2.** Quelle est la probabilité d'attendre 10 minutes ou moins ?

# Probabilités conditionnelles et indépendance




ω et ω′ sont deux issues de Ω
- $\omega \in A$
- $\omega' \in \bar{A} \Leftrightarrow \omega' \notin A$

## I. Rappels

Une expérience aléatoire est un processus dont le résultat relève du hasard.

### Définition – Évènement et évènement contraire

- Dans une expérience aléatoire, chacun des résultats possibles est appelé « issue » et l'ensemble constitué par toutes les issues est appelé « univers », noté Ω.
- Un « événement » est un ensemble d'issues et on considère également qu'une issue est un événement (dit « élémentaire »)
- Si $A$ est un événement, on note $\bar{A}$ l'événement « contraire » de $A$ : c'est l'événement constitué par toutes les issues qui ne sont pas dans $A$.

Exemple :1 page 297
→ Exercices 12 à 15 page 304

Dans cet exemple, on considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer au hasard une carte dans un jeu classique de 32 cartes.

## Exemple 1 Événement et événement contraire

L'univers de cette expérience est composé de 32 issues : « Tirer le roi de pique » est une de ces issues.

- L'événement A « La carte tirée est un as » est composé de quatre issues puisqu'il y a quatre as dans le jeu.
- L'événement contraire de A est $\overline{A}$ « Tirer une carte qui n'est pas un as » et cet événement est composé de $32-4=28$ issues.

**12** Deux élèves sont choisis au hasard dans une classe. Dans chaque cas, décrire l'événement contraire de l'événement donné, sans utiliser de négation.

**a.** « Les deux élèves sont des filles. »

**b.** « Les deux élèves sont une fille et un garçon. »

**c.** « Au moins un des deux élèves est un garçon. »

**13** Si on tire deux cartes dans un jeu classique de 32 cartes, les événements « Les deux cartes sont des as » et « Aucune des deux cartes n'est un as » sont-ils contraires ? Expliquer.

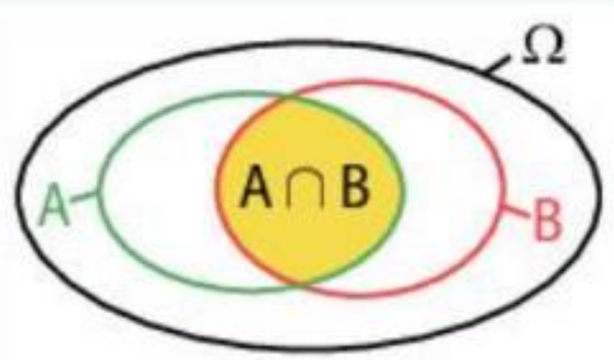
**14** Si on tire deux cartes au hasard et sans remise dans un jeu de 32 cartes classique, quel est le contraire de l'événement « Au moins une des deux cartes est un cœur ou un roi et l'autre n'est pas un cœur » ?

**13** Si on tire deux cartes dans un jeu classique de 32 cartes, les événements « Les deux cartes sont des as » et « Aucune des deux cartes n'est un as » sont-ils contraires ? Expliquer.

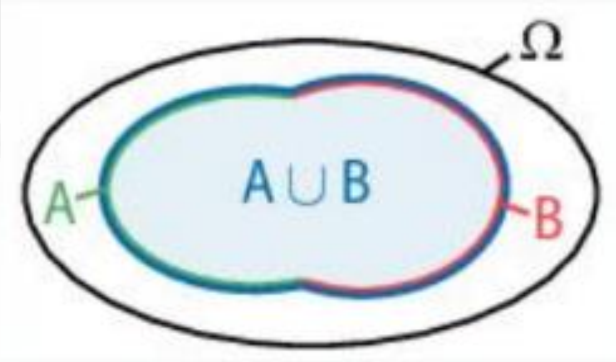
**14** Si on tire deux cartes au hasard et sans remise dans un jeu de 32 cartes classique, quel est le contraire de l'événement « Au moins une des deux cartes est un cœur ou un roi et l'autre n'est pas un cœur » ?

En probabilités, on utilise des notations qui permettent d'être plus concis.

- On note $A \cap B$ l'événement constitué des issues qui sont à la fois dans A et B.

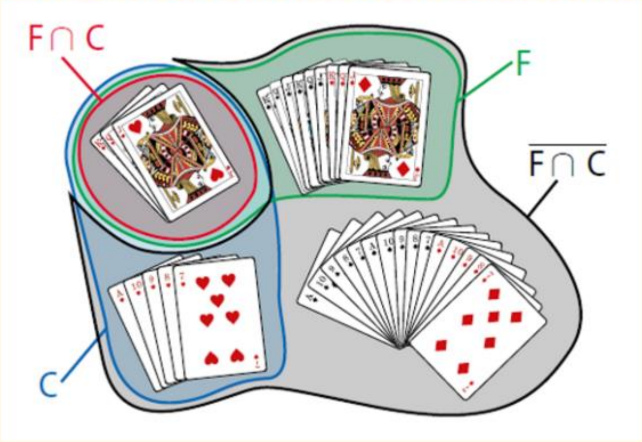



- On note $A \cup B$ l'événement constitué des issues qui sont dans au moins un des deux ensembles A ou B.




Exemple : 2 page 297
→ Exercices 18 à 20 page 305

## Exemple 2 Union et intersection de deux événements, événement contraire




Soit F et C les événements « La carte tirée est une figure (un roi, une dame ou un valet) » et « La carte tirée est un cœur ».

L'événement $F \cap C$ correspond à « La carte tirée est une figure et un cœur », et son contraire $\overline{F \cap C}$ est « La carte tirée n'est pas une figure ou n'est pas un cœur ».

En effet, les issues qui composent $\overline{F \cap C}$ sont celles qui ne sont pas à la fois dans F et dans C, autrement dit celles qui ne sont pas dans F ou celles qui ne sont pas dans C.

Ainsi, $\overline{F \cap C} = \overline{F} \cup \overline{C}$.

**Pour les exercices 18 et 19, on considère une pépinière composée de 720 plants, 80 % des arbres sont des conifères, 60 % des arbres sont âgés de moins de deux ans dont 300 sont des conifères.**

Nicolas le jardinier choisit un arbre au hasard et on note C l'événement « Cet arbre est un conifère » et D l'événement « Cet arbre est âgé de moins de deux ans ».

**18** **1.** Donner les probabilités des événements C, D et $C \cap D$.

**2.** En déduire les probabilités des événements $C \cup D$ et $\overline{C \cup D}$.

**19** Calculer la probabilité $P\left(D \cap \overline{C}\right)$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

**20** Soit A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire et tels que $P(A) = 0{,}2$ ; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$.

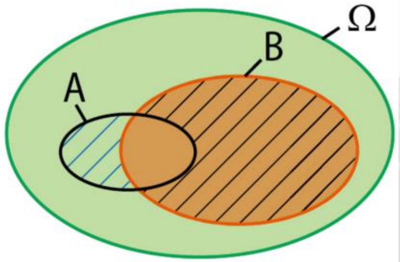
Calculer les probabilités :

**a.** $P\left(A \cap \overline{B}\right)$

**b.** $P(A \cup B)$

**c.** $P\left(\overline{A \cup B}\right)$

**d.** $P\left(\overline{A} \cap B\right)$



**Pour les exercices 18 et 19, on considère une pépinière composée de 720 plants, 80 % des arbres sont des conifères, 60 % des arbres sont âgés de moins de deux ans dont 300 sont des conifères.**
Nicolas le jardinier choisit un arbre au hasard et on note C l'événement « Cet arbre est un conifère » et D l'événement « Cet arbre est âgé de moins de deux ans ».

**18** **1.** Donner les probabilités des événements C, D et $C \cap D$.

**2.** En déduire les probabilités des événements $C \cup D$ et $\overline{C \cup D}$.

**19** Calculer la probabilité $P\left(D \cap \bar{C}\right)$ et en donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

**20** Soit A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire et tels que $P(A) = 0{,}2$ ; $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}12$.

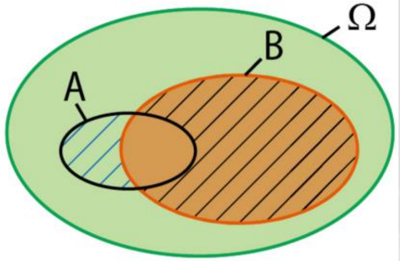
Calculer les probabilités :

**a.** $P\left(A \cap \bar{B}\right)$

**b.** $P(A \cup B)$

**c.** $P\left(\overline{A \cup B}\right)$

**d.** $P\left(\bar{A} \cap B\right)$



### Définition - Notion de probabilité

Une probabilité $P$ sur $\Omega$ est une fonction qui, à tout événement, associe un nombre de l'intervalle [0 ; 1] et qui vérifie :

- $\boldsymbol{P(\Omega) = 1}$
- pour tous événements **incompatibles** A et B, c'est-à-dire tels que $A \cap B$ ne contient aucune issue,

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B).}$$

On donne deux conséquences immédiates et très utiles de cette définition.

### Proposition 1 - Conséquences de la définition d'une probabilité (Dém exo 29 page 300)

- Pour tout événement A, on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Si $A$ et $B$ sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cap B) = 0$.

Le deuxième point de la définition d'une probabilité se généralise.

### Proposition 2 - Formule du crible pour deux événements (Dém page 300)

Pour tous événements $A$ et $B$, on a

$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$$

On est souvent amené à travailler dans le cas particulier suivant, par exemple dans une expérience de tirage unique où les éléments à choisir sont indistinguables.

**Définition - Équiprobabilité**

On dit que les issues de $\Omega$ sont équiprobables si elles ont toutes la même probabilité.

Alors, pour toute issue $\omega$ , $P(\omega) = \frac{1}{n}$ et pour tout événement $A$ composé de $k$ issues, $P(A) = \frac{k}{n}$

## Exemple 3 Équiprobabilité et formule du crible

Avec les notations de l'Exemple 2, il y a 8 cœurs et $4 \times 3 = 12$ figures dans le jeu. Ainsi, l'événement C est composé de 8 issues et l'événement F est constitué de 12 issues. Comme les cartes ont toutes la même probabilité d'être tirées (c'est la situation qui sous-entend cette hypothèse d'équiprobabilité), on a :

$$P(\mathrm{C}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(\mathrm{F}) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}.$$

Or, il y a 3 cartes qui sont des figures et des cœurs, donc $P(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) = \frac{3}{32}$.

D'après la formule du crible :

$$P(\mathrm{F} \cup \mathrm{C}) + P(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) = P(\mathrm{F}) + P(\mathrm{C}),$$

soit $P(\mathrm{F} \cup \mathrm{C}) + \frac{3}{32} = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$, d'où $P(\mathrm{F} \cup \mathrm{C}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} - \frac{3}{32}$,

puis $P(\mathrm{F} \cup \mathrm{C}) = \frac{8+12-3}{32} = \frac{17}{32}$.

On peut contrôler la valeur du numérateur avec le dénombrement : $\mathrm{F} \cup \mathrm{C}$ est composé des 8 issues de C et des $3 \times 3 = 9$ issues qui sont dans F mais pas dans C (car on les a déjà comptabilisées), soit 17 issues.

**Dans les exercices 25 et 26, A et B sont deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.**

**25** Si $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}2$, $P(\mathrm{A}) = 0{,}7$ et $P(\mathrm{B}) = 0{,}3$, que vaut $P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ ?

**26** Pourquoi n'est-il pas possible d'avoir à la fois :
$P(\mathrm{A}) = 0{,}8$, $P(\mathrm{B}) = 0{,}6$ et $P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}3$ ?

**27** Dans un groupe de 20 adolescents pratiquant tous le football ou le rugby, 15 pratiquent le football et 8 pratiquent le rugby. Si on choisit un de ces adolescents au hasard, quelle est la probabilité qu'il pratique le football et le rugby ?

**28** Dans le lycée de Yasmina, 35 % des élèves de 1re ont choisi la spécialité mathématiques, 15 % ont choisi les spécialités mathématiques et physique-chimie et 70 % ont choisi au moins une de ces deux spécialités.
Yasmina affirme que la moitié des élèves de 1re de son lycée ont choisi la spécialité physique-chimie. A-t-elle raison ?

**Dans les exercices 25 et 26, A et B sont deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.**

**25** Si $P(A \cap B) = 0{,}2$, $P(A) = 0{,}7$ et $P(B) = 0{,}3$, que vaut $P(A \cup B)$ ?

**26** Pourquoi n'est-il pas possible d'avoir à la fois :
$P(A) = 0{,}8$, $P(B) = 0{,}6$ et $P(A \cap B) = 0{,}3$ ?

**27** Dans un groupe de 20 adolescents pratiquant tous le football ou le rugby, 15 pratiquent le football et 8 pratiquent le rugby. Si on choisit un de ces adolescents au hasard, quelle est la probabilité qu'il pratique le football et le rugby ?

**28** Dans le lycée de Yasmina, 35 % des élèves de $1^{re}$ ont choisi la spécialité mathématiques, 15 % ont choisi les spécialités mathématiques et physique-chimie et 70 % ont choisi au moins une de ces deux spécialités.
Yasmina affirme que la moitié des élèves de $1^{re}$ de son lycée ont choisi la spécialité physique-chimie. A-t-elle raison ?

# 1 Découvrir les probabilités conditionnelles

On traitera au choix une seule des deux parties A ou B.

## A ▸ Professions et catégories socioprofessionnelles

**1.** Un institut de sondage réalise une étude sur deux PCS (professions et catégories socioprofessionnelles), les employés et les ouvriers. Elle dispose d'un échantillon constitué comme ci-contre.

Quand on tire au sort une personne dans cet échantillon, on considère les événements F : « La personne est une femme » et E : « La PCS de la personne est “employée” ».

| | Femme | Homme | Total |
|---|---|---|---|
| **Employé** | 40 | 13 | 53 |
| **Ouvrier** | 9 | 32 | 41 |
| **Total** | 49 | 45 | 94 |

**a)** Calculer $p(\text{F})$, $p(\text{E})$ et $p(\text{F} \cap \text{E})$.

**b)** Supposons que l'on sache que la personne tirée au sort est une femme. Quelle est la probabilité que sa PCS soit « employée » ?

**c)** Décrire par une phrase $p_{\text{E}}(\text{F})$, puis calculer cette probabilité. Même question pour $p_{\overline{\text{F}}}(\overline{\text{E}})$.

**2.** D'après l'Insee, si l'on considère ces deux PCS, en France, il y a 57 % d'employés dont 76 % de femmes. On tire au sort une personne de la population parmi celles appartenant à une de ces PCS.

**a)** En reprenant les mêmes notations qu'à la question **1.**, traduire chacun des pourcentages de l'énoncé en une probabilité, éventuellement conditionnelle.

**b)** Quelle est la probabilité que la personne tirée au sort soit une femme dont la PCS est « employée » ? On commencera par donner la formule littérale en utilisant la question **2. a)** puis on donnera le résultat sous forme décimale.

# II. Conditionnement et indépendance

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

## A. Probabilité de B sachant A

**Définition**

A et B sont deux événements, avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'événement B sachant A, notée $P_A(B)$, est définie par : $\boldsymbol{P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}}$

**Remarque :** si $P(B) \neq 0$, on définit de même la probabilité de l'événement A sachant B par $\boldsymbol{P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}}$

**Exemple**

Un service après-vente a constaté que les retours d'un appareil sont dus dans 30 % des cas à une panne A, dans 40 % des cas à une panne B et dans 3 % des cas à la simultanéité des deux pannes.

Un appareil choisi au hasard présente la panne A.

La probabilité pour qu'il ait aussi la panne B est : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}03}{0{,}3} = 0{,}1$

# ① Calculer avec un tableau à double entrée

Greg a créé une *playlist* de 300 titres de différents genres musicaux interprétés par des artistes de différents pays.

La répartition de ces titres est donnée par le tableau ci-contre.

Quand il lance sa *playlist* en mode aléatoire, on considère les événements suivants :

- A : « L'interprète du titre joué est américain. »
- R : « Le titre joué est du rap. »
- E : « Le titre joué est de l'électro. »

| | Rap | Pop | Électro | Total |
|---|---|---|---|---|
| Américain | 117 | 34 | 27 | 178 |
| Autre | 23 | 61 | 38 | 122 |
| Total | 140 | 95 | 65 | 300 |

1. Calculer $p_A(R)$ et $p_{\overline{R}}(A)$.

2. Un titre pop est joué. Écrire la probabilité que son interprète soit américain comme une probabilité conditionnelle puis la calculer.

# ① Calculer avec un tableau à double entrée

**Greg a créé une *playlist* de 300 titres de différents genres musicaux interprétés par des artistes de différents pays.**

**La répartition de ces titres est donnée par le tableau ci-contre.**

**Quand il lance sa *playlist* en mode aléatoire, on considère les événements suivants :**

- **A : « L'interprète du titre joué est américain. »**
- **R : « Le titre joué est du rap. »**
- **E : « Le titre joué est de l'électro. »**

| | Rap | Pop | Électro | Total |
|---|---|---|---|---|
| Américain | 117 | 34 | 27 | 178 |
| Autre | 23 | 61 | 38 | 122 |
| Total | 140 | 95 | 65 | 300 |

**1. Calculer $p_A(R)$ et $p_{\overline{R}}(A)$.**

**2. Un titre pop est joué. Écrire la probabilité que son interprète soit américain comme une probabilité conditionnelle puis la calculer.**

**Solution**

1. La probabilité que le titre joué soit du rap sachant que son interprète est américain est $p_A(R) = \frac{117}{178}$. 1

$p_{\overline{R}}(A) = \frac{34 + 27}{95 + 65} = \frac{61}{160}$.

2. « Le titre joué est de la pop » est le contraire de « Le titre joué est du rap ou de l'électro » c'est-à-dire $\overline{R \cup E}$. 2

On cherche donc $p_{\overline{R \cup E}}(A) = \frac{34}{95}$. 3

**Conseils & Méthodes**

1 Comme on sait que A est réalisé, on ne considère que la ligne correspondante du tableau dans laquelle on identifie le nombre total d'issues associé à $p_A$ et le nombre de ces issues réalisant l'événement R.

| | Rap | Pop | Électro | Total |
|---|---|---|---|---|
| Américain | 117 | 34 | 27 | 178 |

2 On identifie les événements mis en jeu.

3 Que la probabilité soit conditionnelle ou non, on cherche la probabilité que « ce soit un titre interprété par un américain » donc l'événement A est celui entre parenthèse.

**1** Dans une boulangerie, on dispose d'une réduction si l'on choisit la formule « dessert mystère » pour laquelle le dessert accompagnant le menu est tiré au hasard.

Ceyda choisit cette formule alors que les desserts encore disponibles sont répartis comme suit.

| | Chocolat | Vanille | Total |
|---|---|---|---|
| Tartelette | 8 | 11 | 19 |
| Éclair | 13 | 7 | 20 |
| Total | 21 | 18 | 39 |

On considère les événements E : « Son dessert est un éclair » et V : « Son dessert est à la vanille. »

1. Calculer $p_E(V)$, $p_V(E)$, $p_{\overline{E}}(V)$.
2. Ceyda voit que son dessert est un éclair.

Écrire la probabilité qu'il soit au chocolat comme une probabilité conditionnelle puis la calculer.

**2** Dans un jeu de construction, il y a des briques de couleurs et de tailles différentes (taille 2 et taille 4).

Un enfant dispose de briques selon la répartition ci-dessous.

Il prend une brique au hasard et on considère les événements R : « La brique est rouge », V : « La brique est verte » et $T_4$ : « La brique est de taille 4. »

| | Rouge | Jaune | Vert | Total |
|---|---|---|---|---|
| Taille 2 | 97 | 101 | 83 | 281 |
| Taille 4 | 74 | 86 | 68 | 228 |
| Total | 171 | 187 | 151 | 509 |

1. Calculer $p_R(T_4)$, $p_{T_4}(V)$, $p_{\overline{T_4}}(\overline{V})$.
2. L'enfant prend une brique de taille 4.

Calculer la probabilité qu'elle soit jaune.

**26** On considère deux événements A et B tels que $p(A) = 0,2$ et $p_A(B) = 0,8$.
Calculer $p(A \cap B)$.

$$p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0,2 \times 0,8 = 0,16$$

**27** On considère deux événements C et D tels que $p(C) = 0,1$ et $p(C \cap D) = 0,06$.
Calculer $p_C(D)$.

$$p_C(D) = \frac{p(C \cap D)}{p(C)} = \frac{0,06}{0,1} = 0,6$$

**28** On considère deux événements U et V tels que $p(V) = \frac{3}{4}$ et $p(U \cap V) = \frac{3}{8}$.
Calculer $p_V(U)$.

$$p_V(U) = \frac{p(U \cap V)}{p(V)} = \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}} = \frac{3}{8} \times \frac{4}{3} = 0,5$$

**Exercice 29**

Dans une ville, 80 % des logements sont des appartements, occupés à 45 % par une seule personne et à 55 % par plusieurs personnes.

Le reste des logements sont des maisons.

Quand on prend un logement au hasard dans cette ville,

on considère les événements suivants :

- A : « Le logement est un appartement. »
- S : « Le logement est occupé par une seule personne. »

**1) a)** Déterminer $p$(A) et $p_A$(S) en utilisant l'énoncé.

$$p(A) = 0{,}8 \ \ et \ \ p_A(S) = 0{,}45$$

**b)** En déduire la probabilité que le logement soit un appartement occupé par une seule personne.

$$On\ nous\ demande\ p(A \cap S)\ or\ \ p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0{,}8 \times 0{,}45 = 0{,}36$$

**2)** Par ailleurs, 17 % des logements de cette ville sont des maisons occupées par plusieurs personnes.

**a)** Traduire cette information en une probabilité en utilisant les événements $\overline{A}$ et $\overline{S}$.

$$p\left(\overline{A} \cap \overline{S}\right) = 0{,}17$$

**b)** Déterminer $p\left(\overline{A}\right)$ en utilisant l'énoncé.

$$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$$

**c)** En déduire la probabilité que le logement soit occupé par plusieurs personnes sachant que c'est une maison.

$$On\ cherche\ \ p_{\overline{A}}\left(\overline{S}\right)\ \ or\ \ p_{\overline{A}}\left(\overline{S}\right) = (p\left(\overline{A} \cap \overline{S}\right) = \frac{p\left(\overline{A} \cap \overline{S}\right)}{p\left(\overline{A}\right)} = \frac{0{,}17}{0{,}2} = 0{,}85$$

## B. Probabilité de $A \cap B$

**Propriété**

A et B sont deux événements avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité de l'intersection des événements A et B est :

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$$

**Remarque :** si $P(B) \neq 0$, on a de façon analogue $\boldsymbol{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$

**Exemple**

40 % des chiens d'un éleveur sont des labradors. Les femelles représentent 65 % des labradors et 45 % des autres chiens.

On choisit au hasard le carnet de santé de l'un des chiens de l'éleveur et on note A l'événement : « Le chien est un labrador » et B l'événement : « Le chien est une femelle ».

Ainsi $P(A) = 0{,}4$ et $P_A\,(B) = 0{,}65$.

La probabilité de $A \cap B$ : « Le chien est un labrador femelle » est :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}65 = 0{,}26$$

## C. Indépendance de deux évènements

**Définition**

Dire que des événements $A$ et $B$ sont **indépendants** signifie que

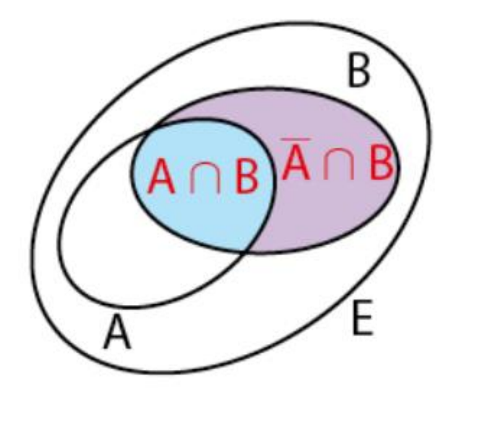
$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

**Propriété**

Si deux événements $A$ et $B$ sont indépendants, alors les événements $\bar{A}$ et $B$ le sont aussi.

Démonstration

D'après le diagramme ci-contre :




$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$ , soit $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$.

Or A et B sont indépendants, c'est-à-dire $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Par conséquent, $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$

$$= \big(1 - P(A)\big) \times P(B) = P(\bar{A}) \times P(B)$$

Ainsi, les événements $\bar{A}$ et $B$ sont aussi indépendants.

**35** On considère deux événements A et B tels que $p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,6$ et $p(A \cap B) = 0,9$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

**36** On considère deux événements A et B tels que $p(A) = \frac{5}{12}$, $P(B) = \frac{3}{10}$ et $p(A \cap B) = \frac{1}{8}$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

**37** On considère deux événements indépendants C et D tels que $p(C) = 0,12$ et $p(D) = 0,65$.
Déterminer $p_C(D)$, $p_D(C)$ et $p(C \cap D)$.

**38** On considère deux événements indépendants E et F tels que $p(E) = \frac{1}{3}$ et $p(E \cap F) = \frac{1}{12}$. Calculer $p(F)$.

**39** Dans une population il y a 80 % de droitiers et 45 % de myopes. Parmi les myopes, $\frac{1}{5}$ ne sont pas droitiers.
Quand on tire au sort quelqu'un dans cette population, les événements D : « obtenir une personne droitière » et M : « obtenir une personne myope » sont-ils indépendants ?

**40** La répartition des pantalons de Gani est donnée par le tableau ci-dessous :

| | Habillé | Décontracté | Total |
|---|---|---|---|
| **Bleu** | 5 | 8 | 13 |
| **Noir** | 3 | 6 | 9 |
| **Rouge** | 0 | 2 | 2 |
| **Total** | 8 | 16 | 24 |

Il prend un pantalon au hasard dans son armoire et on considère les événements :
- B : « Le pantalon est bleu. »
- N : « Le pantalon est noir. »
- R : « Le pantalon est rouge. »
- D : « Le pantalon est décontracté. »

Les événements suivants sont-ils indépendants ?

**a)** B et D
**b)** R et $\overline{D}$
**c)** N et D
**d)** N et $\overline{D}$

**40** La répartition des pantalons de Gani est donnée par le tableau ci-dessous :

| | Habillé | Décontracté | Total |
|---|---|---|---|
| **Bleu** | 5 | 8 | 13 |
| **Noir** | 3 | 6 | 9 |
| **Rouge** | 0 | 2 | 2 |
| **Total** | 8 | 16 | 24 |

Il prend un pantalon au hasard dans son armoire et on considère les événements :

- B : « Le pantalon est bleu. »
- N : « Le pantalon est noir. »
- R : « Le pantalon est rouge. »
- D : « Le pantalon est décontracté. »

Les événements suivants sont-ils indépendants ?

**a)** B et D
**b)** R et $\overline{D}$
**c)** N et D
**d)** N et $\overline{D}$

## Corrigé

$a)\ p_B(D) = \dfrac{8}{13}\ \ et\ \ p(D) = \dfrac{16}{24} = \dfrac{2}{3}$

Donc $p_B(D) \neq p(D)$ : B et D ne sont donc pas indépendants.

**b)** $p_R(\overline{D}) = 0$ et $p(\overline{D}) = \dfrac{1}{3}$, donc $p_R(\overline{D}) \uparrow p(\overline{D})$ : R et $\overline{D}$ ne sont pas indépendants.

**c)** $p_N(D) = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$ et $p(D) = \dfrac{2}{3}$, donc $p_N(D) = p(D)$ : N et D sont indépendants.

**d)** N et D sont indépendants, donc N et $\overline{D}$ sont indépendants d'après le cours.

# III. Arbres pondérés

Une loi de probabilité P est définie sur l'univers E d'une expérience aléatoire.

## A. Arbre pondéré par des probabilités

**Exemple**

On reprend l'exemple du paragraphe *II.B)*.
On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous réalisé en respectant certaines règles.

40 % des chiens d'un éleveur sont des labradors.
Les femelles représentent 65 % des labradors et 45 % des autres chiens.
On choisit au hasard le carnet de santé de l'un des chiens de l'éleveur et on note A l'événement : « Le chien est un labrador » et B l'événement : « Le chien est une femelle ».

40 % des chiens d'un éleveur sont des labradors.
Les femelles représentent 65 % des labradors et 45 % des autres chiens.
On choisit au hasard le carnet de santé de l'un des chiens de l'éleveur et on note A l'événement : « Le chien est un labrador » et B l'événement : « Le chien est une femelle ».

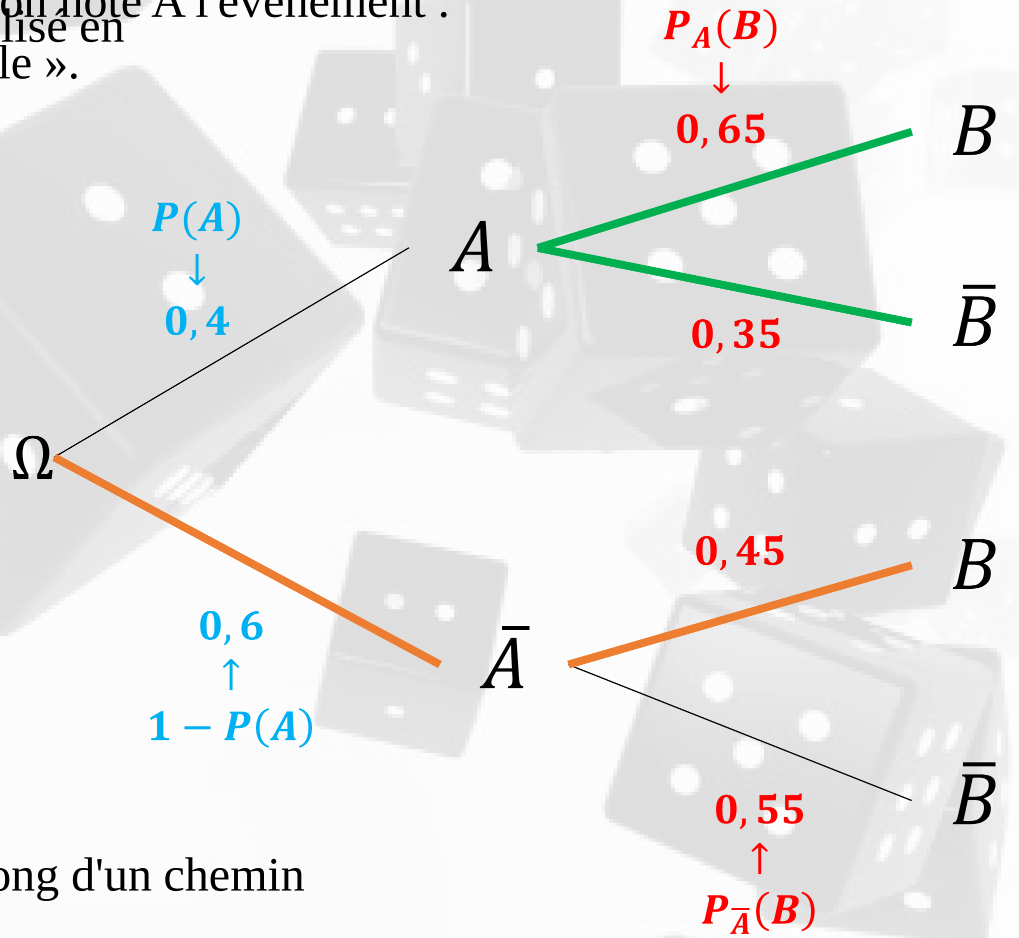
**Exemple**

On reprend l'exemple du paragraphe *I.B)*.
On peut représenter cette expérience par l'arbre pondéré ci-dessous réalisé en respectant certaines règles.

- **Règle 1** Sur les branches du niveau, on inscrit les probabilités des événements correspondants.

- Règle 2 Sur les branches du 2ème niveau, on inscrit des probabilités conditionnelles.

- Règle 3 La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1.




**Remarque :** le produit des probabilités des événements rencontrés le long d'un chemin est égal à la probabilité de l'intersection de ces événements.

Par exemple, pour le chemin orange, on retrouve

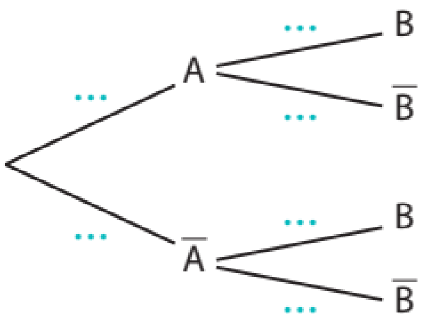
$$P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B) = 0{,}6 \times 0{,}45 = 0{,}27$$

**32** On considère un jeu dans lequel on lance d'abord un dé à 10 faces puis :

- si le résultat est 10, on lance un dé à 4 faces ;
- sinon on lance un dé à 6 faces.

On gagne lorsque le résultat du deuxième dé est 1.
On considère les événements A : « Le résultat du premier dé est 10 » et B : « le joueur gagne ».

**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.




**2.** Déterminer $P(A \cap B)$.

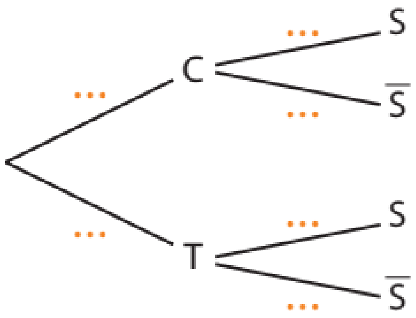
**3.** Déterminer la probabilité de gagner.

**33** Le matin, Dzovinar boit du café avec une probabilité $\frac{7}{12}$ ou du thé avec une probabilité $\frac{5}{12}$.

Lorsqu'elle boit du café, elle y met du sucre la moitié du temps alors que quand elle boit du thé, elle y met du sucre 90 % du temps.

On appelle C l'événement : « elle boit du café ce matin », T l'événement : « elle boit du thé ce matin » et S l'événement : « elle met du sucre dans sa boisson ce matin ».

**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.




**2.** Quelle est la probabilité qu'elle boive un café sucré ce matin ?

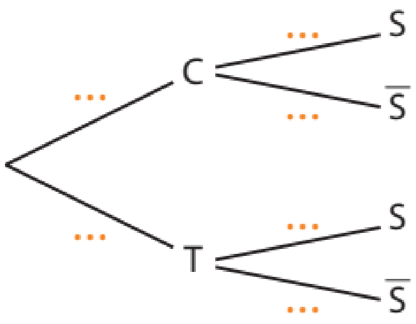
**3.** Déterminer la probabilité qu'elle ne mette pas de sucre dans sa boisson ce matin.

**33** Le matin, Dzovinar boit du café avec une probabilité $\frac{7}{12}$ ou du thé avec une probabilité $\frac{5}{12}$.

Lorsqu'elle boit du café, elle y met du sucre la moitié du temps alors que quand elle boit du thé, elle y met du sucre 90 % du temps.

On appelle C l'événement : « elle boit du café ce matin », T l'événement : « elle boit du thé ce matin » et S l'événement : « elle met du sucre dans sa boisson ce matin ».

**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.




**2.** Quelle est la probabilité qu'elle boive un café sucré ce matin ?

**3.** Déterminer la probabilité qu'elle ne mette pas de sucre dans sa boisson ce matin.

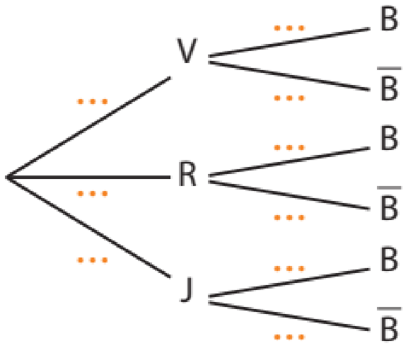
**34** La répartition des poivrons chez un maraîcher est :

- 40 % de poivrons verts dont 60 % sont bio.
- 45 % de poivrons rouges dont 50 % sont bio.
- 15 % de poivrons jaunes dont 80 % sont bio.

Nino achète un de ces poivrons au hasard et on note :

- V l'événement « Le poivron est vert ».
- R l'événement « Le poivron est rouge ».
- J l'événement « Le poivron est jaune ».
- B l'événement « Le poivron est bio ».

**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.




**2.** Calculer la probabilité qu'il achète un poivron jaune bio.

**3.** Calculer $p(B)$ puis $p(\overline{B})$.

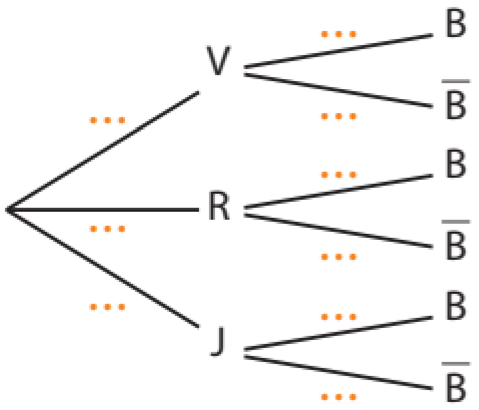
**34** La répartition des poivrons chez un maraîcher est :

- 40 % de poivrons verts dont 60 % sont bio.
- 45 % de poivrons rouges dont 50 % sont bio.
- 15 % de poivrons jaunes dont 80 % sont bio.

Nino achète un de ces poivrons au hasard et on note :

- V l'événement « Le poivron est vert ».
- R l'événement « Le poivron est rouge ».
- J l'événement « Le poivron est jaune ».
- B l'événement « Le poivron est bio ».

**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.

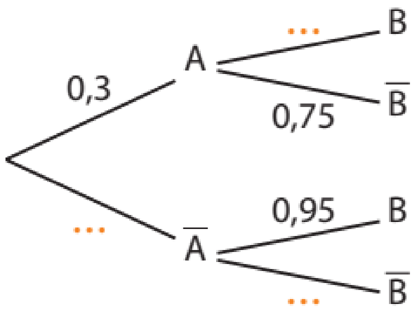



**2.** Calculer la probabilité qu'il achète un poivron jaune bio.

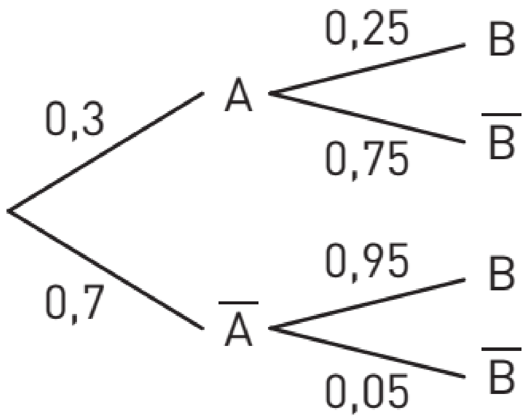
**3.** Calculer $p(B)$ puis $p(\overline{B})$.

## Utiliser un arbre pondéré

**31** Pour deux événements A et B, recopier et compléter l'arbre ci-contre puis calculer $p(A \cap B)$, $p(\bar{A} \cap B)$, $p(A \cap \bar{B})$, $p(\bar{A} \cap \bar{B})$, $p(B)$ et $p(\bar{B})$.




**Corrigé**




- $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = 0{,}3 \times 0{,}25 = 0{,}075$
- $p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(B) = 0{,}7 \times 0{,}95 = 0{,}665$
- $p(A \cap \bar{B}) = p(A) \times p_A(\bar{B}) = 0{,}3 \times 0{,}75 = 0{,}225$
- $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0{,}7 \times 0{,}05 = 0{,}035$
- $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0{,}075 + 0{,}665 = 0{,}74$
- $p(\bar{B}) = p(A \cap \bar{B}) + p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}225 + 0{,}035 = 0{,}26$

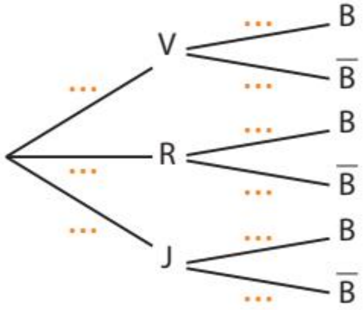
**34** La répartition des poivrons chez un maraîcher est :

- 40 % de poivrons verts dont 60 % sont bio.
- 45 % de poivrons rouges dont 50 % sont bio.
- 15 % de poivrons jaunes dont 80 % sont bio.

Nino achète un de ces poivrons au hasard et on note :

- V l'événement « Le poivron est vert ».
- R l'événement « Le poivron est rouge ».
- J l'événement « Le poivron est jaune ».
- B l'événement « Le poivron est bio ».

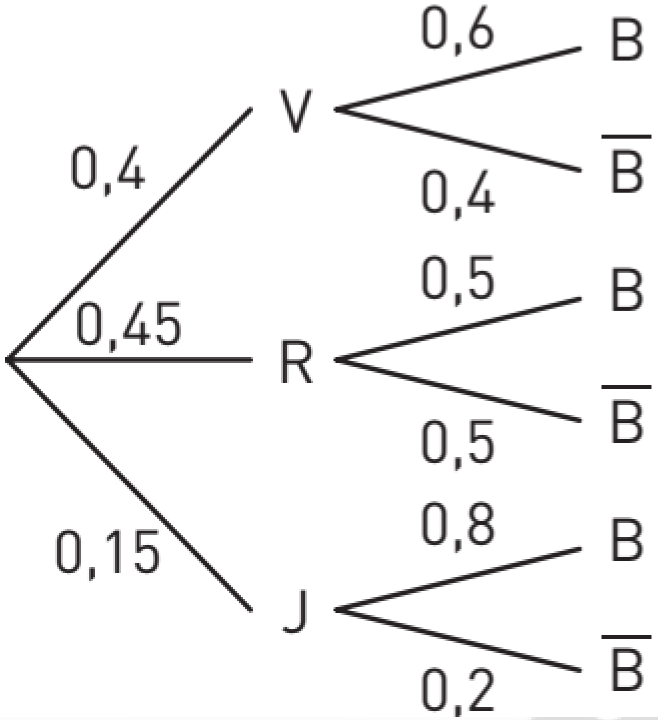
**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.




**2.** Calculer la probabilité qu'il achète un poivron jaune bio.

**3.** Calculer $p(B)$ puis $p(\overline{B})$.

**Corrigé**




**2.** $p(J \cap B) = p(J) \times p_J(B) = 0{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}12$

**3.** • $p(B) = p(V) \times p_V(B) + p(R) \times p_R(B) + p(J) \times p_J(B)$

$= 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}45 \times 0{,}5 + 0{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}585$

• $p(\overline{B}) = 1 - 0{,}585 = 0{,}415$

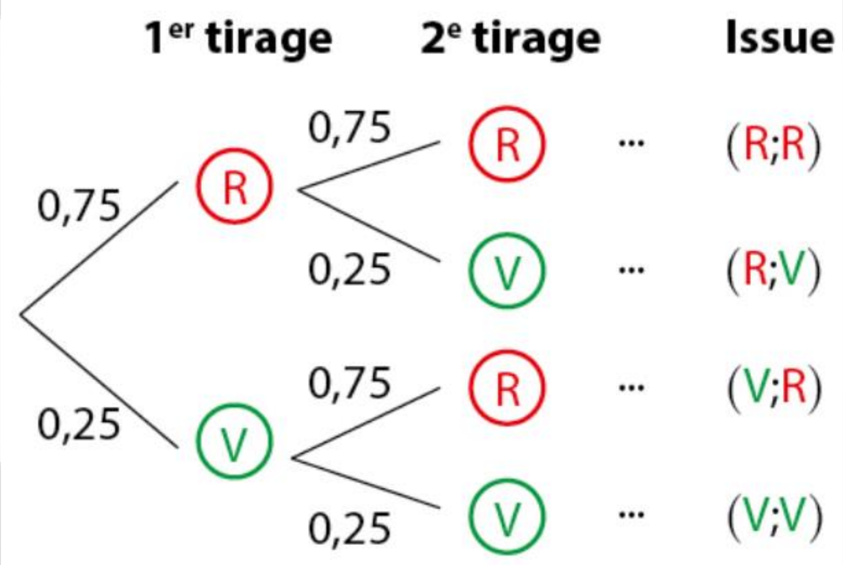
## B. Succession de deux épreuves indépendantes

**Vocabulaire :**

Dans une succession de deux épreuves, lorsque l'issue de l'une quelconque de ces épreuves ne dépend pas des issues de l'autre épreuve, on dit que ces épreuves sont indépendantes.

**Exemple**

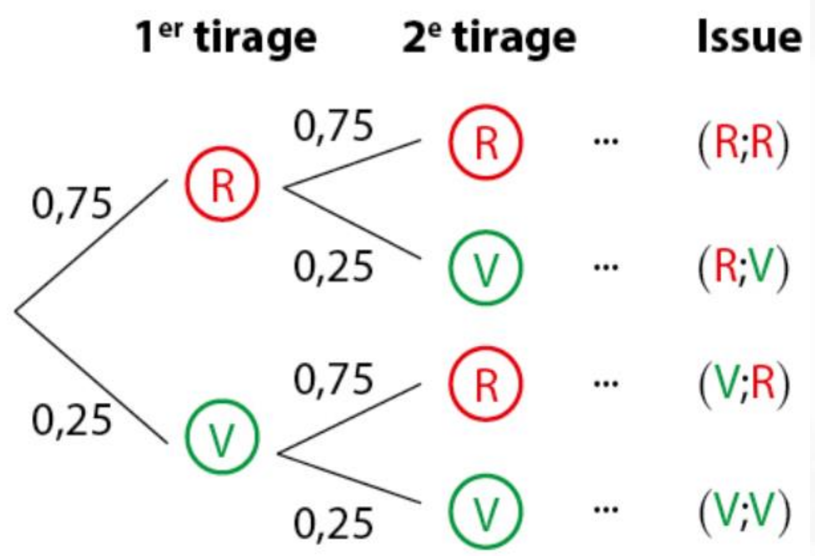
Une urne opaque contient trois boules rouges et une boule verte.
On prélève, au hasard et avec remise, deux boules de cette urne et on note les couleurs obtenues.




Une succession de deux branches est appelée un chemin.
Chaque chemin conduit à une issue.

## Propriété (admise)

Dans une répétition d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est le produit des probabilités rencontrées sur le chemin qui conduit à cette issue.




## Exemple

L'issue (R ; V) a pour probabilité $P(R\,;\,V) = 0{,}75 \times 0{,}25 = 0{,}187\,5.$

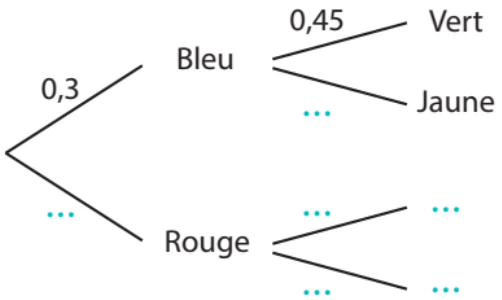
Exemple : 3 page 325

→ Exercices 20 et 21 page 331

## Représenter une succession de deux épreuves indépendantes

**41** On donne ci-dessous un arbre incomplet représentant une succession de deux épreuves indépendantes.

**1.** Recopier et compléter cet arbre.




**2.** Dresser un tableau représentant cette expérience aléatoire.

**42** Justin vérifie sa boîte à lettres tous les soirs et la probabilité qu'il y ait du courrier est 0,47. On admet que la présence de courrier ou non dans sa boîte à lettres un soir n'a pas d'influence sur celle du soir suivant.

**1.** Pourquoi peut-on penser que la répétition de cette épreuve deux soirs consécutifs est une succession de deux épreuves indépendantes ?

**2.** Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre.

**3.** Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un tableau à double entrée.

**43** Dans un jeu de Scrabble®, il y a 45 voyelles sur 102 jetons. On tire successivement deux jetons de Scrabble® avec remise et on note si l'on a obtenu une voyelle ou non.

**1.** Cette expérience aléatoire est-elle une succession de deux épreuves indépendantes ? Justifier.

**2.** Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre.

**3.** Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un tableau à double entrée.

**44** Ornella et Fanny sont allées boire un verre et, au moment de partir, elles décident de laisser un pourboire.

Pour cela, Ornella prend une pièce au hasard dans sa poche qui contient deux pièces de 0,50 euro et une de 1 euro puis Fanny prend une pièce au hasard dans son porte-monnaie qui contient trois pièces de 0,20 euro, une de 1 euro et une de 2 euros.

**1.** Pourquoi peut-on penser que ces deux tirages sont une succession de deux épreuves indépendantes ?

**2.** Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre.

**3.** Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un tableau à double entrée.

## Inversion du conditionnement

**62** Sophie a mis des dragées dans une boîte, les unes contiennent une amande, les autres pas :

- 30 % des dragées contiennent une amande ;
- 40 % des dragées avec amande sont bleues et les autres roses ;
- 25 % des dragées sans amande sont roses et les autres bleues.

Sophie choisit au hasard une dragée dans la boîte et on considère les événements :

- A : « La dragée choisie contient une amande. »
- B : « La dragée choisie est bleue. »

**1.** Représenter la situation par un arbre pondéré.

**2.** Montrer que $p(A \cap B) = 0{,}12$.

**3.** Calculer $p(B)$ puis en déduire $p_B(A)$.

**4.** Calculer $p_{\overline{B}}(A)$.

**5.** Sophie préfère les dragées contenant une amande. Doit-elle plutôt choisir une dragée bleue ou rose ?

(D'après bac)

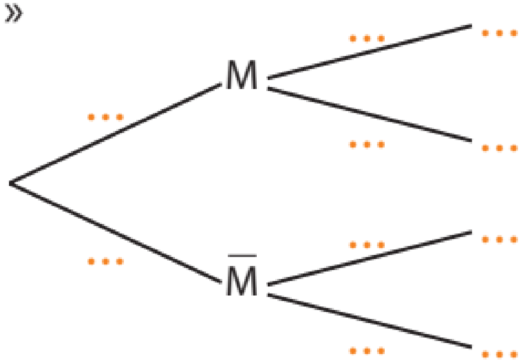
**65** Un test de dépistage d'une maladie est mis en vente. Le mode d'emploi précise que :

- pour une personne n'étant pas malade, le test est néanmoins positif (c'est-à-dire désigne cette personne comme malade) dans 2,5 % des cas ;
- pour une personne malade, le test est néanmoins négatif (c'est-à-dire désigne cette personne comme non malade) dans 0,1 % des cas.

On suppose qu'une maladie touche 2 % de la population d'un pays et qu'on décide de faire passer ce test à tous les habitants.

On considère, pour un habitant donné, les événements :

- M : « Cet habitant est malade. »
- T : « Le test est positif. »




**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre afin qu'il représente la situation.

**2. a)** Calculer $p(M \cap T)$ puis $p(T)$.

**b)** En déduire la probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif.

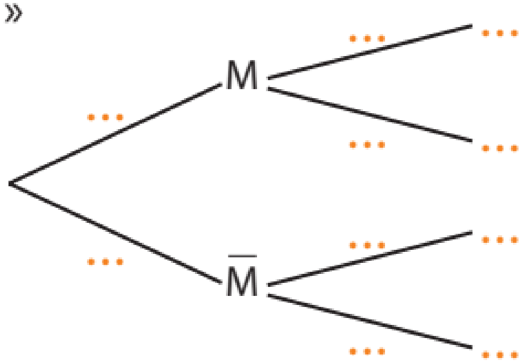
**c)** Peut-on dire que ce test est efficace ?

**65** Un test de dépistage d'une maladie est mis en vente. Le mode d'emploi précise que :

- pour une personne n'étant pas malade, le test est néanmoins positif (c'est-à-dire désigne cette personne comme malade) dans 2,5 % des cas ;
- pour une personne malade, le test est néanmoins négatif (c'est-à-dire désigne cette personne comme non malade) dans 0,1 % des cas.

On suppose qu'une maladie touche 2 % de la population d'un pays et qu'on décide de faire passer ce test à tous les habitants.
On considère, pour un habitant donné, les événements :

- M : « Cet habitant est malade. »
- T : « Le test est positif. »




**1.** Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre afin qu'il représente la situation.

**2. a)** Calculer $p(\text{M} \cap \text{T})$ puis $p(\text{T})$.

**b)** En déduire la probabilité que la personne soit malade sachant que le test est positif.

**c)** Peut-on dire que ce test est efficace ?

**22** ★★ Le prix d'un produit peut :

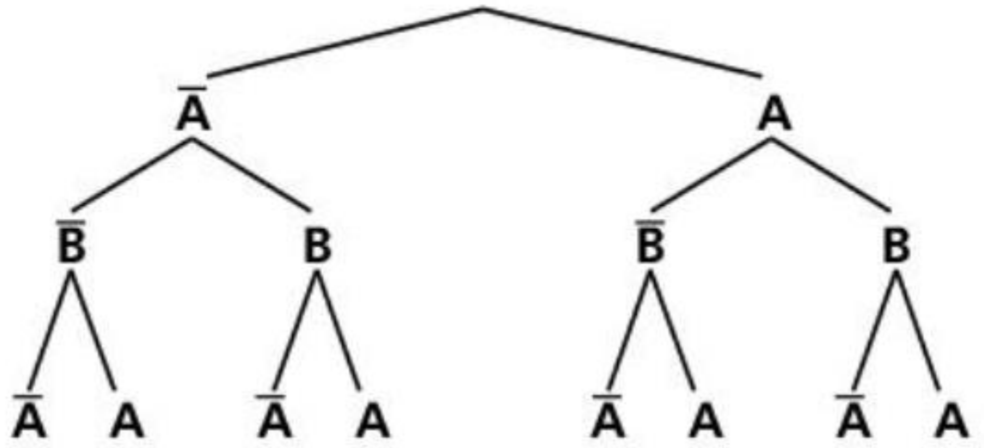
- augmenter de 5 % avec une probabilité de 0,4 ;
- baisser de 5 % avec une probabilité de 0,2 .

On considère les événements :

A : « le prix augmente de 5 % »

B : « le prix baisse de 5 % » .

On suppose que les événements A et B sont indépendants. Le prix subit trois évolutions successives, les différentes possibilités étant représentées par l'arbre ci-dessous :




**1. a)** Calculer la probabilité que le prix ait subit une hausse de 5 % , puis une baisse de 5 % , puis une hausse de 5 % .

**b)** Dans ce cas, calculer le pourcentage d'évolution final de ce prix.

**2.** Le prix n'a subi qu'une seule hausse de 5 % .

**a)** Combien a-t-on de possibilités ne comportant qu'une seule fois A ?

**b)** Calculer les pourcentages globaux possibles d'évolution de ce prix.

**c)** Calculer la probabilité que le prix n'ait subi qu'une seule hausse.

# Épreuves indépendantes

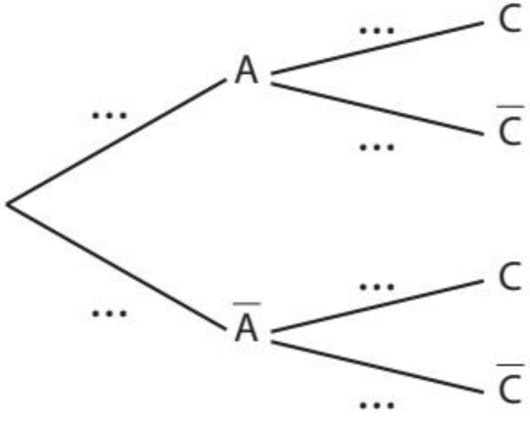
**77** Quand on lance deux fois de manière indépendante une pièce non équilibrée, la probabilité d'obtenir 1 fois Pile et 1 fois Face est 0,4. Déterminer la probabilité d'obtenir Pile quand on lance cette pièce.

**80** On génère successivement avec la calculatrice deux nombres entiers aléatoires, un entre 1 et 3 puis un autre entre 4 et 7.
On considère que ces deux épreuves sont indépendantes.
Représenter cette succession de deux épreuves indépendantes par un arbre ou un tableau puis déterminer la probabilité que la somme des deux nombres obtenus soit paire.

**73** Le cuisinier d'une colonie de vacances a confectionné des beignets pour le goûter :

- 30 % des beignets sont à l'ananas, les autres sont aux pommes ;
- 35 % des beignets à l'ananas sont aromatisés à la cannelle, ainsi que 45 % des beignets aux pommes.

On choisit un beignet au hasard et on définit les événements A : « Le beignet choisi est à l'ananas » et C : « Le beignet choisi est aromatisé à la cannelle ».




**1.** Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-contre.

**2.** Les événements A et C sont-ils indépendants ? Justifier la réponse.

(D'après bac)