Évaluation n°1 - 1 sept 2021 (1h45)

Exercice 1 (2 points)

Niveau 1

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$, telle que $u_4 = 3$ et $u_6 = 48$
   Déterminer la valeur de q.

On a $u_6 = u_4 \times q^{6-4} \Leftrightarrow 48 = 3 \times q^2 \Leftrightarrow q^2 = 16 \Leftrightarrow q = 4$ car $q > 0$

2. Soit (v_n) une suite arithmétique de raison r telle que $u_4 = 3$ et $u_7 = 18$.
   Déterminer la valeur de r.

On a $u_7 = u_4 + (7-4) \times r \Leftrightarrow 18 = 3 + 3r \Leftrightarrow 3r = 15 \Leftrightarrow r = 5$

Exercice 2 (2 points)

Niveau 1

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 3$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = (2(n+1)^2 - 3) - (2n^2 - 3) = 2(n^2 + 2n + 1) - 3 - 2n^2 + 3 = 4n + 2$
Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4n + 2 > 0$ donc $u_{n+1} - u_n > 0$ ce qui prouve que la suite est strictement croissante.

Exercice 3 (2 points)

Étudier les variations de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{3^n}{4^{n-1}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3^{n+1}}{4^{n+1-1}} - \frac{3^n}{4^{n-1}} = \frac{3^{n+1}}{4^n} - \frac{3^n \times 4}{4^{n-1} \times 4} = \frac{3^{n+1} - 4 \times 3^n}{4^n} = \frac{3^n(3-4)}{4^n} = -\frac{3^n}{4^n} < 0$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n < 0$ dons la suite u est strictement décroissante.

Exercice 4 (4 points)

Niveau 1-2

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1 \end{cases}$

1. Calculer u_1 et u_2.

$$u_1 = \frac{1}{2}u_0 + 1 = \frac{3}{2} \quad ; \quad u_2 = \frac{1}{2}u_1 + 1 = \frac{7}{4}$$

2. La suite est-elle arithmétique, géométrique ? Justifier.
   - La suite **n'est pas arithmétique** car $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$. En effet :
   $$u_1 - u_0 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \quad et \quad u_2 - u_1 = \frac{7}{4} - \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$$
   - La suite **n'est pas géométrique** car $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$. En effet :
   $$\frac{u_1}{u_0} = \frac{3}{2} \times 1 = \frac{3}{2} \quad et \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{7}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{6}$$

3. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 2$.

Soit P_n la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$ »

Initialisation :
Pour $n = 0$: $u_0 = 1$ et $1 \leq 2$ donc la propriété est vérifiée : P_0 est vraie.

Hérédité
On suppose que pour $1 \leq k \leq n$, P_k est vraie c'est-à-dire que $u_k \leq 2$.
Peut on prouver dans ce cas que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1} \leq 2$?

On a $u_k \leq 2 \iff \frac{1}{2}u_k + 1 \leq \frac{1}{2} \times 2 + 1 \iff u_{k+1} \leq 2$
On a montré que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $P_k \Rightarrow P_{k+1}$

Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2$.

Exercice 5 (4 points)

Niveau 2

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{3}{u_n+1} \end{cases}$.

1. Démontrer par récurrence que : pour tout entier naturel n, $\frac{3}{4} \leq u_n \leq 3$.

Soit P_n la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{3}{4} \leq u_n \leq 3$ »

- Initialisation :

Pour $n = 0$: $u_0 = 3$ et $\frac{3}{4} \leq 3 \leq 3$ donc la propriété est vérifiée : P_0 est vraie.

- Hérédité

On suppose que pour $1 \leq k \leq n$, P_k est vraie c'est-à-dire que $\frac{3}{4} \leq u_k \leq 3$.
Peut on prouver dans ce cas que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $\frac{3}{4} \leq u_{k+1} \leq 3$?

On a $\frac{3}{4} \leq u_k \leq 3$ donc $\frac{7}{4} \leq u_k + 1 \leq 4$ puis $\frac{4}{7} \geq \frac{1}{u_k+1} \geq \frac{1}{4}$ et enfin $\frac{12}{7} \geq \frac{3}{u_k+1} \geq \frac{3}{4}$
On peut écrire que $\frac{3}{4} \leq \frac{3}{u_k+1} \leq \frac{12}{7} \leq 3$ c'est-à-dire $\frac{3}{4} \leq u_{k+1} \leq 3$
On a montré que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $P_k \Rightarrow P_{k+1}$

- Conclusion : pour tout entier naturel n , $\frac{3}{4} \leq u_n \leq 3$.

2. Quelle conjecture pouvez-vous faire concernant le comportement de la suite u pour des grandes valeurs de n.

D'après la calculatrice, il semblerait que les termes de la suite se rapproche de 1,3.

Exercice 6 (4 points)

Niveau 2

Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Soit S_n la propriété : « pour tout $n \in \mathbb{N},\ 1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$ »

- Initialisation :

Pour $n=\ 0: 1+2+3+4+\cdots+n=0$ et $\frac{0\times(0+1)}{2}=0$ donc la propriété S_0 est vraie.

- Hérédité

On suppose que pour $1\leq k\leq n$, on a $1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$

Peut on prouver que $1+2+3+\cdots+(k+1)=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$?

On a

$$1+2\ +3\ +\cdots+(k+1)=1+2+3\ +\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$\text{Or}\quad \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

On a montré que la propriété est héréditaire : $S_k \Rightarrow S_{k+1}$.

- Conclusion : pour tout entier naturel n non nul, $1+2+3+4+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 7 (2 points + 2points bonus)

Niveau 3

On considère la suite u définie par $u_0=0$, $u_1=1$ et pour tout entier $n\geq 1$:

$$u_{n+1}=4u_n-3u_{n-1}$$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n : $u_n=\frac{3^n-1}{2}$.

Soit P_n la propriété : « pour tout $n\in\mathbb{N}^*,\ u_n=\frac{3^n-1}{2}$ »

- Initialisation :

Pour $n=0$: $u_0=1$ et $\frac{3^0-1}{2}=0$ donc la propriété est vérifiée : P_0 est vraie.

- Hérédité

On suppose que pour $1\leq k\leq n$, P_k est vraie c'est-à-dire que $u_k=\frac{3^k-1}{2}$.

Peut on prouver dans ce cas que P_{k+1} est vraie c'est-à-dire que $u_{k+1}=\frac{3^{k+1}-1}{2}$?

On sait que $u_{k+1}=4u_k-3u_{k-1}$ donc

$$u_{k+1}=4\times\frac{3^k-1}{2}-3\,\frac{3^{k-1}-1}{2}$$

$$=\frac{4\times3^k-4-3\times3^{k-1}+3}{2}$$

$$=\frac{4\times3^k-3^k-1}{2}=\frac{3\times3^k-1}{2}=\frac{3^{k+1}-1}{2}$$

On donc bien $u_{k+1}=\frac{3^{k+1}-1}{2}$.

On a montré que la propriété est héréditaire c'est-à-dire que $P_k\Rightarrow P_{k+1}$

- Conclusion : pour tout entier naturel n , $u_n=\frac{3^n-1}{2}$.