Première Spé	Évaluation de mathématiques n°1 Le second degré (1 h)	16 septembre 2021

Calculatrice interdite

Exercice 1 (Niveau 1)

3 points

Déterminer le nombre de solutions réelles de chaque équation ci-dessous.

$$a)\ x^2 - 3x + 2 = 0$$

L'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ est une équation du second degré.

$$a = 1 \ ; \ b = -3 \ ; \ c = 2$$

Le discriminant Δ est égal à $b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1$.

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes.

$$b)\ 2x^2 + 1 - x = 0$$

$$2x^2 + 1 - x = 0 \iff 2x^2 - x + 1 = 0$$

L'équation $2x^2 - x + 1 = 0$ est une équation du second degré.

$$a = 2 \ ; \ b = -1 \ ; \ c = 1$$

Le discriminant Δ est égal à $b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 - 8 = -7$.

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

$$c)\ 4 + 4x + x^2 = 0$$

$$4 + 4x + x^2 = 0 \iff x^2 + 4x + 4 = 0$$

L'équation $x^2 + 4x + 4 = 0$ est une équation du second degré.

$$a = 1 \ ; \ b = 4 \ ; \ c = 4$$

Le discriminant Δ est égal à $b^2 - 4ac = (4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0$.

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle.

Exercice 2 (Niveau 1)

8 points

Pour chacune des fonctions suivantes, résoudre l'équation $f(x) = 0$.

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x + 3$

L'équation $f(x) = 0$ est une équation du second degré.

$$a = 1 \ ; \ b = 2 \ ; \ c = 3$$

Le discriminant Δ est égal à $b^2 - 4ac = (2)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -8$.

$\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solution réelle.

$$\boxed{\text{Donc } S = \emptyset}$$

2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + x + 3$

L'équation $f(x) = 0$ est une équation du second degré.

$$a = -2 \ ; \ b = 1 \ ; \ c = 3$$

Le discriminant Δ est égal à $b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-2) \times 3 = 25$.

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(1) + \sqrt{25}}{2 \times (-2)} = \frac{-1 + 5}{-4} = -1$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(1) - \sqrt{25}}{2 \times (-2)} = \frac{-1 - 5}{-4} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$\boxed{\text{Donc } S = \left\{-1 \ ; \frac{3}{2}\right\}}$$

3. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 8$

L'équation $2x^2 - 8x + 8 = 0$ est une équation du second degré.

$$a = 2 \;\; ; \;\; b = -8 \;\; ; \;\; c = 8$$

Le discriminant Δ est égal à $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 64 - 64 = 0$.

$\Delta = 0$ donc l'équation admet une unique solution réelle égale à $-\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2\times 2} = 2$.

$$\boxed{\text{Donc } S = \{2\}}$$

Exercice 3 (Niveau 2)

3 points

Déterminer, si possible, l'expression factorisée du polynôme P suivant :

$$P(x) = -3x^2 + x + 2$$

$$a = -3 \;\; ; \;\; b = 1 \;\; ; \;\; c = 2$$

Le discriminant Δ est égal à $b^2 - 4ac = (1)^2 - 4 \times (-3) \times 2 = 25$.

$\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(1) + \sqrt{25}}{2 \times (-3)} = \frac{-1 + 5}{-6} = -\frac{2}{3}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(1) - \sqrt{25}}{2 \times (-3)} = \frac{-1 - 5}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

On peut en déduire que

$$P(x) = -3\left(x - \left(-\frac{2}{3}\right)\right)(x - 1) = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1)$$

Exercice 4 (Niveau 2)

2 points

On sait que le trinôme suivant admet 2 racines réelle : $P(x) = 2x^2 - 14x - 11$.
Déterminer la somme et le produit des racines de P.

$$S = -\frac{b}{a} = -\frac{-14}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

$$P = \frac{c}{a} = -\frac{11}{2}$$

Exercice 5 (Niveau 3)

2 points

Déterminer une racine évidente du polynome P suivant puis en déduire, sans calculer le discriminant, la seconde racine de P si elle existe.

$$P(x) = x^2 - \left(\sqrt{7} + 1\right)x + \sqrt{7}$$

$$P(1) = 1^2 - \left(\sqrt{7} + 1\right) \times 1 + \sqrt{7} = 0$$

Donc 1 est une racine évidente de P.

On sait que $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{1} = \sqrt{7}$ donc $1 \times x_2 = \sqrt{7} \Leftrightarrow x_2 = \sqrt{7}$.

La deuxième racine est donc $\sqrt{7}$.

Exercice 6 (Niveau 3)

2 points

Résoudre l'équation suivante :

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=4$$

Il faut que $x \neq 0$ et $x \neq -2$.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}=4 \Leftrightarrow \frac{1\times(x+2)}{x\times(x+2)}+\frac{1\times x}{(x+2)\times x}=4$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2+x}{x(x+2)}=4 \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x(x+2)}=4$$

$$\Leftrightarrow 2x+2=4x(x+2) \Leftrightarrow 2x+2=4x^2+8x \Leftrightarrow 4x^2+8x-2x-2=0$$

$$\Leftrightarrow 4x^2+6x-2=0$$

L'équation $4x^2+6x-2=0$ est une équation du second degré.

$$a=4 \;\; ; \;\; b=6 \;\; ; \;\; c=-2$$

Le discriminant Δ est égal à $b^2-4ac=(6)^2-4\times(4)\times(-2)=36+32=68$.

$\Delta>0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes x_1 et x_2 :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6+\sqrt{68}}{2\times 4}=\frac{-6+\sqrt{68}}{8}$$

$$\text{et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-6-\sqrt{68}}{2\times 4}=\frac{-6-\sqrt{68}}{8}$$

$$\boxed{\text{Donc } S=\left\{\frac{-6+\sqrt{68}}{8} \; ; \frac{-6-\sqrt{68}}{8}\right\}}$$